



**SCHOOL OF
ECONOMICS &
MANAGEMENT
LISBON**

MESTRADO
CIÊNCIAS ATUARIAIS

TRABALHO FINAL DE MESTRADO

RELATÓRIO DE ESTÁGIO

CONSTRUÇÃO DE TÁBUAS DE MORTALIDADE DINÂMICAS
PARA O MERCADO PORTUGUÊS DE FUNDOS DE PENSÕES
E AVALIAÇÃO DO RISCO DE LONGEVIDADE

DANIELA ALEXANDRA DINIS PATEIRO

SETEMBRO DE 2013



**SCHOOL OF
ECONOMICS &
MANAGEMENT
LISBON**

MESTRADO
CIÊNCIAS ATUARIAIS

TRABALHO FINAL DE MESTRADO

RELATÓRIO DE ESTÁGIO

CONSTRUÇÃO DE TÁBUAS DE MORTALIDADE DINÂMICAS
PARA O MERCADO PORTUGUÊS DE FUNDOS DE PENSÕES
E AVALIAÇÃO DO RISCO DE LONGEVIDADE

DANIELA ALEXANDRA DINIS PATEIRO

ORIENTADORES: DOUTOR ONOFRE ALVES SIMÕES
MESTRE SOFIA GANDIAGA FREDERICO

SETEMBRO DE 2013

CONSTRUÇÃO DE TÁBUAS DE MORTALIDADE DINÂMICAS PARA O MERCADO PORTUGUÊS DE FUNDOS DE PENSÕES E AVALIAÇÃO DO RISCO DE LONGEVIDADE

DANIELA ALEXANDRA DINIS PATEIRO

ORIENTADORES: DOUTOR ONOFRE ALVES SIMÕES

MESTRE SOFIA GANDIAGA FREDERICO

MESTRADO EM: CIÊNCIAS ATUARIAIS

RESUMO

Os aumentos de longevidade registados nas últimas décadas a nível mundial constituem um desafio para o setor de fundos de pensões, especialmente no que diz respeito à adequada avaliação das responsabilidades associadas a planos de pensões de benefício definido e à própria gestão do risco de longevidade.

Este relatório resulta de um estágio realizado no Instituto de Seguros de Portugal. O estudo centra-se na construção de *tábuas de mortalidade dinâmicas* para a população portuguesa de fundos de pensões e na *avaliação do risco de longevidade*, tendo sido motivado, entre outras razões, pelas propostas da Autoridade Europeia dos Seguros e Pensões Complementares de Reforma (EIOPA), em matéria de requisitos quantitativos. Tais propostas surgiram no âmbito do processo de revisão da diretiva relativa às atividades e à supervisão das instituições de realização de planos de pensões profissionais, a Diretiva IORP.

A análise da evolução dinâmica da mortalidade da população de fundos de pensões é bastante relevante, tanto para efeitos de regulação e de supervisão, como pela possibilidade de suscitar um referencial nacional que incentive a aplicação de tábuas que incorporam perspetivas futuras de incremento de longevidade.

PALAVRAS-CHAVE: dinâmica da mortalidade, Diretiva IORP, risco de longevidade

DEVELOPMENT OF DYNAMIC LIFE TABLES FOR THE PORTUGUESE MARKET OF PENSION FUNDS AND ASSESSMENT OF THE LONGEVITY RISK

DANIELA ALEXANDRA DINIS PATEIRO

SUPERVISORS: DOUTOR ONOFRE ALVES SIMÕES
MESTRE SOFIA GANDIAGA FREDERICO

MASTER IN: ACTUARIAL SCIENCE

ABSTRACT

The increase of longevity registered worldwide in the last decades represents a challenge to the pension funds sector, especially in what concerns the adequate valuation of the liabilities stemming from defined benefit pension plans and the longevity risk management.

This report is the result of an internship with the Portuguese Insurance and Pension Funds Supervisory Authority (*Instituto de Seguros de Portugal*) and focuses on the development of *dynamic life tables* for the Portuguese pension funds population and on the *longevity risk assessment*. This study was motivated by the proposals of the European Insurance and Occupational Pensions Authority (EIOPA) on quantitative requirements, under the review of the IORP Directive on the activities and supervision of institutions for occupational retirement provisions.

Studying the dynamic evolution of this population's mortality is rather important, not only for regulation and supervisory purposes, but also for the possibility of evoking a national referential that encourages the application of tables incorporating future longevity increments.

KEY WORDS: mortality's dynamic, IORP Directive, longevity risk

Índice

1. Introdução	1
2. Revisão da Literatura	5
3. Tábuas de Mortalidade Dinâmicas	9
3.1. Notação e Hipótese Base	11
3.2. Modelo Poisson-Lee-Carter	12
3.3. Método de Denuit e Goderniaux	15
3.4. Métodos Relacionais	17
3.4.1. Modelo Relacional tipo-Brass	17
3.4.2. Modelo de Riscos Proporcionais de Cox	18
3.5. Aplicação	18
3.5.1. Dados	18
3.5.2. Modelo Poisson-Lee-Carter	20
3.5.3. Modelo de Denuit e Goderniaux	22
3.5.4. Modelo relacional	23
3.5.5. Comparação com outras tábuas de mortalidade	25
4. Avaliação do Risco de Longevidade	28
4.1. Simulação de Monte-Carlo	29
4.2. Simulação baseada na metodologia <i>Value-at-Risk</i>	30
4.3. Aplicação	32
5. Conclusão	34
Referências Bibliográficas	36
Anexos	41
A – Processo Iterativo de Goodman	42
B – Valores Estimados para os parâmetros do modelo Poisson-Lee-Carter para homens e mulheres	44

C – Valores Projetados de k_t do Modelo Poisson-Lee-Carter para Homens e Mulheres	45
D – Modelo Relacional tipo-Brass	46
E – Exemplos de valores para as probabilidades de morte projetadas para a população portuguesa de fundos de pensões	48
F – Matriz de informação de Fisher e simulação dos parâmetros α, β e k	50

Índice de Figuras

Figura 1 – Número de mortes na população portuguesa de pensionistas dos fundos de pensões feminina (esquerda) e masculina (direita)	19
Figura 2 – Parâmetros do modelo Poisson-Lee-Carter para homens (a azul) e mulheres (a rosa).....	21
Figura 3 – Comparação dos valores de μ_x (a tracejado) com os valores do modelo de riscos proporcionais de Cox (a cheio) para homens (esquerda) e mulheres (direita)	23
Figura 4 – Comparação dos valores de μ_x (a tracejado) com os valores do modelo relacional tipo-Brass (a cheio) para homens (esquerda) e mulheres (direita)	46
Figura 5 – Comparação dos valores de μ_x obtidos com o modelo relacional tipo-Brass para mulheres com os dados da população feminina portuguesa entre os 40 e os 70 anos	47
Figura 6 – Tábuas de mortalidade dinâmicas por género	48

Índice de Tabelas

Tabela I – Esperança média de vida da população portuguesa	20
Tabela II – Parâmetros do modelo ARIMA(0,1,0) para homens e mulheres	21
Tabela III – Parâmetros do modelo de riscos proporcionais de Cox para homens e mulheres.....	23
Tabela IV – Esperança média de vida aos 65 anos	25
Tabela V – Valor atuarial de anuidades vitalícias em diferentes situações – as tábuas TV vs. as tábuas dinâmicas	26
Tabela VI – Valor atuarial de anuidades vitalícias para homens a um nível de confiança de 99,5% e respetiva variação face à tábua de mortalidade dinâmica.....	32
Tabela VII – Valor atuarial de anuidades vitalícias para mulheres a um nível de confiança de 99,5% e respetiva variação face à tábua de mortalidade dinâmica.....	33
Tabela VIII – Valores estimados para os parâmetros do modelo Poisson-Lee-Carter para homens e mulheres.....	44
Tabela IX – Valores projetados para o parâmetro k_t do modelo Poisson-Lee-Carter para homens e mulheres.....	45
Tabela X – Parâmetros do modelo relacional tipo-Brass para homens e mulheres.....	46
Tabela XI – Probabilidades de morte de um indivíduo com 65 anos no ano de referência da tábua de mortalidade dinâmica.....	49

Agradecimentos

Deixo, em primeiro lugar, um agradecimento muito especial à minha família, em especial à minha mãe, ao meu irmão e aos meus avós, por acreditarem em mim e pelo apoio e compreensão que me ajudaram a chegar até aqui.

Ao Instituto de Seguros de Portugal, em particular à Mestre Sofia Frederico, pela oportunidade que me foi concedida e pela inestimável orientação que permitiu ultrapassar alguns dos obstáculos com os quais me deparei ao longo deste trabalho.

Por fim, ao Professor Onofre Alves Simões, pela sua disponibilidade e apoio, cujo precioso contributo foi fundamental para a realização deste trabalho.

1. Introdução

O tema da mortalidade tem sido objeto de estudo ao longo dos tempos, mas o interesse pela chamada “dinâmica da mortalidade” é relativamente recente. De acordo com Pitacco (2004), a ligação da mortalidade à matemática atuarial data já da segunda metade do século XVII, mas foi só no início do século XX que surgiu o conceito de dinamismo da mortalidade. Tal acontece porque só desde então se vem observando que a longevidade das populações aumenta de forma sustentada a nível mundial, facto visível de forma clara na evolução dos valores da esperança média de vida (cf., por exemplo, <http://www.mortality.org/>). No caso de Portugal, a esperança média de vida aos 65 anos, idade normal de reforma, passou de 13,5 anos em 1970 para 18,8 em 2010, um aumento de quase 40% em 40 anos (INE, PORDATA).

Este incremento da longevidade é de extrema importância para o setor dos fundos de pensões, especialmente no que diz respeito à adequada avaliação das responsabilidades associadas a planos de pensões de benefício definido – sobre os fundamentos dos planos e fundos de pensões ver, por exemplo, McGill (1984). Sobretudo nestes, é imperativa a mensuração e a gestão do chamado risco de longevidade, de modo a assegurar o cumprimento integral dos compromissos assumidos perante os participantes e beneficiários.

Efetivamente, quando um plano de pensões garante o pagamento de anuidades até à morte dos beneficiários, o facto de as durações dos benefícios virem a ser sistematicamente superiores às que estão implícitas na tábuia de mortalidade utilizada nas avaliações atuariais, pode suscitar um problema de financiamento no longo prazo, levando inclusivamente à necessidade de um esforço adicional de contribuições por parte do(s) associado(s).

A esse respeito, e para efeitos de cálculo do valor atual das responsabilidades com pensões em pagamento e com serviços passados, sob o cenário do mínimo de solvência, deve ser usada a tabela de mortalidade TV 73/77 - Norma Regulamentar nº 21/1996, de 5 de dezembro, emitida pelo Instituto de Seguros de Portugal (ISP). Esta tabela, de origem francesa, é uma tabela *estática*, ou seja, representa a mortalidade da população para um dado período no tempo.

Por outro lado, e relativamente ao cenário de financiamento, as entidades gestoras dos fundos de pensões devem escolher a tabela de mortalidade que melhor se adequa ao perfil da população em causa. Seria, portanto, de esperar que procurassem de alguma forma utilizar tabelas dinâmicas, mas o que se observa na maioria dos planos é que a opção continua a ser pela tabela TV 73/77, ou pela tabela TV 88/90, que é também uma tabela estática. Isto, apesar de a aplicação de tabelas de mortalidade que não incluam as expectativas futuras relativas à evolução da esperança média de vida poder constituir uma limitação séria, como as instâncias da União Europeia têm vindo a advertir.

Com efeito, em abril de 2011, a Comissão Europeia dirigiu à *European Insurance and Occupational Pensions Authority* (EIOPA) um pedido de aconselhamento sobre a revisão da Diretiva 2003/41/CE, que diz respeito às atividades e à supervisão das instituições de realização de planos de pensões profissionais (Diretiva IORP). Em resposta, (*EIOPA's advice to the European Commission on the review of the IORP Directive 2003/41/EC*) a EIOPA propôs que em matéria de requisitos quantitativos se desenvolvesse uma ferramenta de supervisão baseada nos riscos, conhecida por *Holistic Balance Sheet*.

Tal como sucede no regime Solvência II, a abordagem proposta prevê: (i) o cálculo de provisões técnicas, nomeadamente da melhor estimativa do valor atual esperado dos

cash flows futuros, com base em princípios económicos; (ii) a determinação de um requisito de capital de solvência (SCR), que permita a absorção de um elevado volume de perdas inesperadas para um dado horizonte temporal.

Para testar a operacionalização e o impacto da implementação da *Holistic Balance Sheet*, foi desenvolvido um estudo de impacto quantitativo (QIS) entre 16 de outubro e 17 de dezembro de 2012. As especificações técnicas deste estudo impõem expressamente que, no cálculo da melhor estimativa das provisões técnicas, as projeções devem ter por base tábuas de mortalidade recentes *e incluir uma tendência futura* nas taxas de mortalidade (HBS.4.1 e HBS.4.2 das especificações técnicas). Mais ainda, é apresentada uma fórmula padrão que inclui um submódulo para a avaliação do *risco de longevidade*, na determinação do SCR (SCR.7.28 das especificações técnicas). De acordo com essa fórmula, a melhor estimativa das provisões técnicas deve ser recalculada, depois de aplicado um choque, que se traduz numa redução de 20% das probabilidades de morte para todas as idades. Assim se procura garantir a constituição de níveis de solvência adequados, face a possíveis cenários suscetíveis de pôr em causa o cumprimento das responsabilidades.

Ainda que em junho de 2013 a Comissão Europeia tenha anunciado que a atual revisão da Diretiva IORP não irá incluir aspetos relacionados com os requisitos quantitativos, (MEMO/13/454: *Occupational Pension Funds (IORP): next steps*), não deixa também de acrescentar que é necessário continuar os trabalhos técnicos nesta área. Em conformidade, o estudo da evolução dinâmica da mortalidade da população dos fundos de pensões, em particular no caso português, continua a ter grande relevância:

- Para efeitos de regulação e supervisão do setor.

- Porque pode suscitar um referencial a nível nacional que incentive a aplicação de tábuas dinâmicas, com incorporação de perspetivas futuras de incremento da longevidade.

Com este trabalho propõe-se um duplo contributo para a concretização de tais objetivos:

- Pela construção de uma tabela de mortalidade dinâmica, por géneros, que inclua as especificidades da população portuguesa de fundos de pensões. No âmbito da *Holistic Balance Sheet*, estas tábuas seriam utilizadas para calcular a melhor estimativa das provisões técnicas.
- Pela análise de abordagens alternativas à proposta pela referida fórmula padrão (que se caracteriza pela relativa simplicidade e facilidade de implementação), para a avaliação do risco de longevidade. Tem-se em vista capturar de forma mais adequada a incerteza inerente às projeções de mortalidade, refinando por essa via o modelo usado para derivar as tábuas dinâmicas de mortalidade.

Quanto à estrutura do texto, o Capítulo 2 é dedicado à revisão da literatura mais relevante no estudo da mortalidade. No Capítulo 3, apresenta-se o processo de construção das tábuas de mortalidade dinâmicas, bem como alguns dos respetivos resultados. O Capítulo 4 trata a questão da avaliação do risco de longevidade. A finalizar, no Capítulo 5 constam as principais conclusões e algumas propostas para futuros desenvolvimentos.

Naturalmente, a realização do estudo não teria sido possível sem a oportunidade proporcionada pelo Instituto de Seguros de Portugal (ISP), organismo onde foi realizado o estágio que deu origem ao relatório.

2. Revisão da Literatura

A literatura que tem por tema central o estudo da mortalidade dinâmica é bastante vasta. Vários autores têm dado o seu contributo para esta área que, apesar de já ser estudada há algumas décadas, ainda se encontra em desenvolvimento.

Em Pitacco (2004) é possível encontrar vários exemplos de antecedentes das projeções de mortalidade e de contribuições iniciais para o tema. Um primeiro contributo para a previsão da mortalidade dinâmica foi proposta por Blaschke (1923) que introduziu um modelo baseado na lei de Makeham (Makeham, 1860). O modelo incluía três parâmetros que variavam de acordo com o ano de calendário. Após a estimação dos parâmetros tornava-se possível projetá-los para anos futuros através da extrapolação.

Mas foi só sete décadas depois, com o trabalho de Lee & Carter (1992), que se avançou significativamente na modelização estocástica da mortalidade. Utilizando as taxas de mortalidade central dos Estados Unidos da América, os autores apresentaram um modelo extrapolativo que permite, de forma simples, descrever a mortalidade da população com recurso a um só índice, projetado com métodos de previsão de séries temporais. Recorrendo ao método da decomposição em valores singulares, que possibilita a obtenção de uma solução dos mínimos quadrados, verificaram que o resultado representava de forma clara o padrão de mortalidade em estudo. A metodologia permitiu ainda a construção de intervalos de confiança para as previsões.

Posteriormente, Lee (2000) reviu o modelo, mostrando aplicações à população americana, chilena e canadiana. Algumas extensões do modelo original são descritas, em particular a desagregação por género, já que inicialmente o modelo fora aplicado à

população total. O autor menciona que existem várias possibilidades de desagregação da população, mas a maneira mais simples e intuitiva é o tratamento em separado dos homens e das mulheres, aplicando o modelo de forma independente a cada um dos géneros.

Outros autores procuraram também introduzir aperfeiçoamentos à formulação de Lee-Carter, com destaque para Wilmoth (1993), Alho (2000) e Brouhns *et al.* (2002a). Estes últimos utilizaram uma regressão log-linear de Poisson para estimar os parâmetros, em vez de recorrer ao método de decomposição em valores singulares originalmente aplicado, que levanta problemas de homocedasticidade – modelo Poisson-Lee-Carter.

A nova versão foi aplicada à população belga e os resultados obtidos foram favoravelmente comparados com os proporcionados pela formulação original. Os autores consideraram ainda um aspeto importante para os atuários, que descreveram como um “problema peculiar” das projeções de mortalidade: o impacto da seleção adversa. Para quantificar este impacto, recorreram a um modelo relacional inspirado no trabalho de Brass (1974), que procurou relacionar a força de mortalidade da população belga com a população de pensionistas de fundos de pensões desse país por meio de uma função adequada. A utilização de modelos ditos relacionais surge aliás com alguma frequência na literatura. Por exemplo, Delwarde *et al.* (2004) fazem uma recolha de vários modelos relacionais, entre os quais o modelo de riscos proporcionais de Cox, (Cox, 1972) e o modelo relacional de Brass (Brass, 1974), que aplicaram a vários conjuntos de dados.

Renshaw & Haberman (2006) fornecem uma extensão do modelo Lee-Carter que permite a inclusão de um efeito *cohort*, isto é, do ano de nascimento, no modelo básico. O modelo é aplicado à população de Inglaterra e País de Gales, revelando um melhor ajustamento.

Cairns *et al.* (2006) introduzem um modelo estocástico denominado CBD (Cairns-Blake-Dowd), que contém dois fatores estocásticos para representar a dinâmica da mortalidade. O modelo, aplicado à população de Inglaterra e País de Gales, apresenta um bom ajustamento para idades superiores a 40 anos, tendo sido utilizado pelos autores para calcular o preço de instrumentos financeiros ligados à mortalidade.

Estas são formulações gerais, por assim dizer, mas a literatura tende a tratar em particular dois problemas que, de forma recorrente, exigem abordagens próprias: a modelização da mortalidade nas idades mais avançadas e a avaliação do risco de longevidade.

Relativamente à modelização da mortalidade nas idades mais avançadas, destacam-se o método de Coale-Kisker e o método de Denuit e Goderniaux. No primeiro (Coale & Kisker, 1990) assume-se que a variação exponencial das taxas de mortalidade para as idades mais avançadas não é constante, decrescendo de forma linear. O segundo (Denuit & Goderniaux, 2005) assenta numa regressão log-quadrática e estabelece duas condições que impõem que a curva de mortalidade para as idades mais avançadas seja côncava e que exista uma tangência horizontal no ponto correspondente à idade escolhida como limite para a vida humana. Coelho *et al.* (2007) aplicaram, entre outros, estes dois métodos à população portuguesa, tendo concluído que o método sugerido por Denuit & Goderniaux (2005) apresenta melhores resultados.

Quanto ao risco de longevidade, em Brouhns *et al.* (2002b; 2005) discute-se a importância da correta mensuração dos efeitos que a incerteza das projeções de mortalidade derivadas com o modelo Poisson-Lee-Carter possa ter, em particular, num contexto atuarial. Os autores recorrem à simulação de Monte Carlo (Brouhns *et al.*, 2002b) e ao método *bootstrap* não paramétrico (Brouhns *et al.*, 2005) para derivar intervalos de confiança construídos de modo a considerar de uma forma abrangente as

fontes de variabilidade a que as projeções de mortalidade estão sujeitas. A diferença em relação aos intervalos de confiança anteriores para o modelo Poisson-Lee-Carter advém de a incerteza não se limitar à que decorre da projeção da mortalidade com modelos de séries temporais; outras fontes de incerteza, como por exemplo a que está associada à estimação dos parâmetros do modelo de previsão da mortalidade, também estão presentes.

Inspirando-se no projeto Solvência II, Richards *et al.* (2013) conceberam uma abordagem diferente ao tratamento do risco de longevidade, sugerindo uma metodologia mais consistente com a análise *Value-at-Risk* a 99,5% e horizonte temporal de um ano. A distinção está precisamente no horizonte temporal considerado: em vez da usual abordagem a longo prazo (que os autores denominam de abordagem *run-off*), o risco de longevidade é avaliado para o período de um ano.

3. Tábuas de Mortalidade Dinâmicas

A principal característica que distingue uma tábua de mortalidade dinâmica de uma tábua estática é o facto de a análise da mortalidade ser função não só da idade x , mas também do ano de calendário t (Pitacco, 2004). Para possibilitar a incorporação de incrementos de longevidade nas tábuas, recorre-se a modelos que permitam a extrapolação das tendências de mortalidade para o futuro.

Segundo Wilmoth (2000), a extrapolação é o método mais fidedigno para efetuar projeções, devido à “complexidade e estabilidade histórica” das alterações na longevidade humana. Assim, para construir um modelo que represente a população de forma precisa, são necessários dados históricos referentes a vários anos, de modo a obter boas estimativas dos parâmetros.

Neste capítulo apresenta-se o trabalho desenvolvido na construção de tábuas de mortalidade dinâmicas para a população portuguesa de fundos de pensões. Deve, contudo, salientar-se que numa primeira fase o estudo incide sobre a população geral portuguesa, por géneros, com recurso ao modelo Poisson-Lee-Carter (Brouhns *et al.*, 2002a). Esta escolha foi influenciada pela disponibilidade e qualidade dos dados de fundos de pensões e é descrita em maior detalhe em 3.5.1.

Uma vez que nas idades superiores a 90 anos, e mesmo para a população portuguesa no seu conjunto, os dados disponíveis são insuficientes, não foi possível aplicar-lhes o modelo Poisson-Lee-Carter, tendo sido necessária outra abordagem. Recorreu-se então a um método mais adequado para a extrapolação das probabilidades de morte neste grupo etário, o já citado método de Denuit e Goderniaux (Denuit & Goderniaux, 2005). O facto de o estudo ser, em grande parte, motivado pela observação da

crecente importância da população com idades mais avançadas justifica o esforço adicional.

Com efeito, de acordo com as projeções do Instituto Nacional de Estatística (INE), o peso dos indivíduos com mais de 80 anos em 2060 situar-se-á entre os 12,7% e os 15,8% do total da população portuguesa (Projeções da população residente 2008-2060, INE).

Finalmente, e para obter as tábuas de mortalidade dinâmicas para a população de fundos de pensões, é utilizado um modelo relacional. Como o próprio nome indica, trata-se de modelos em que se procura relacionar o comportamento de duas variáveis, neste caso, a mortalidade de duas populações, a geral e a dos fundos de pensões (Hannerz, 2001).

A aplicação dos modelos relacionais é justificada pela dificuldade em construir tábuas dinâmicas utilizando apenas os dados específicos do setor segurador e dos fundos de pensões. Barrieu *et al.* (2009) dão conta dessa mesma dificuldade relativamente aos dados franceses. Segundo os autores, na construção das tábuas de mortalidade dinâmicas para o setor segurador em 2006, apesar de estarem disponíveis carteiras de 19 empresas, num total de cerca de 700.000 indivíduos, o recurso a um modelo relacional não pôde ser evitado.

Havendo a necessidade de determinar uma expressão que estabeleça a ligação entre a mortalidade da população portuguesa de fundos de pensões e a população geral portuguesa, selecionaram-se dois métodos, associados ao modelo relacional tipo-Brass (Brass, 1974; Brouhns *et al.*, 2002a) e ao modelo de riscos proporcionais de Cox (Cox, 1972; Delwarde *et al.*, 2004), escolhendo-se o mais adequado face aos propósitos do trabalho.

O produto final deste processo é uma matriz com os valores das probabilidades de morte por género, da qual se extraem as tábuas de mortalidade dinâmicas para a população de fundos de pensões.

3.1. Notação e Hipótese Base

Apresenta-se neste ponto alguma notação utilizada no decorrer do trabalho. Para um maior detalhe acerca dos conceitos apresentados, ver, por exemplo, Dickson *et al.* (2009).

$\mu_x(t)$: força de mortalidade de um indivíduo de idade x no ano t .

$q_x(t)$: probabilidade de um indivíduo de idade x morrer durante o ano t .

$p_x(t) = 1 - q_x(t)$: probabilidade de um indivíduo de idade x no ano t atingir a idade $x + 1$.

E_{xt} : número de indivíduos com idade x expostos ao risco durante o ano t .

d_{xt} : número de indivíduos com idade x expostos ao risco durante o ano t , que morrem nesse ano.

$m_x(t) = \frac{d_{xt}}{E_{xt}}$: taxa de mortalidade central de um indivíduo com idade x no ano t .

$a_x(t)$: valor atual esperado (valor atuarial) de uma anuidade vitalícia sobre um indivíduo de idade x no ano t ,

$$(1) \quad a_x(t) = \sum_{k \geq 1} v^k \{p_x(t)p_{x+1}(t+1) \dots p_{x+(k-1)}(t+(k-1))\}$$

$$= \sum_{k \geq 1} v^k \left\{ \prod_{j=0}^{k-1} p_{x+j}(t+j) \right\},$$

onde $v = \frac{1}{1+i}$ é o fator de desconto e i é a taxa de desconto utilizada.

$e_x(t)$: esperança média de vida à idade x no ano t ,

$$(2) \quad e_x(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k \geq 1} \left\{ \prod_{j=0}^{k-1} p_{x+j}(t+j) \right\}.$$

Deve, desde já, introduzir-se a hipótese base adotada neste trabalho, inerente ao Modelo Poisson-Lee-Carter.

HB: As forças de mortalidade $\mu_x(t)$ são constantes entre intervalos de tempo e idade, podendo variar em intervalos diferentes, isto é

$$(3) \quad \mu_{x+u}(t+s) = \mu_x(t) \text{ para } 0 \leq u < 1 \text{ e } 0 \leq s < 1.$$

Deste modo, tem-se que

$$(4) \quad q_x(t) = 1 - \exp(-\mu_x(t)).$$

Pode provar-se ainda que $m_x(t) \approx \mu_{x+\frac{1}{2}}(t)$ (cf. Thatcher, 1999).

Assim, dado (3), pode assumir-se que $m_x(t) = \mu_x(t)$ e, portanto,

$$(5) \quad \mu_x(t) = \frac{d_{xt}}{E_{xt}}.$$

3.2. Modelo Poisson-Lee-Carter

Como se viu atrás, o modelo Poisson-Lee-Carter (Brouhns *et al.*, 2002a) é uma extensão do modelo Lee-Carter (Lee & Carter, 1992), baseado num modelo demográfico combinado com métodos de séries temporais.

A versão original do modelo Lee-Carter é na verdade uma formulação simples, que permite a projeção da mortalidade através de uma representação log-bilinear das taxas de mortalidade central $m_x(t)$:

$$(6) \quad \ln m_x(t) = \alpha_x + \beta_x k_t + \varepsilon_x(t)$$

para $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ e $t = \{t_1, t_2, \dots, t_k\}$, onde $\varepsilon_x(t)$ é o termo aleatório que representa os erros homocedásticos centrados ($\varepsilon_x(t) \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$).

Os parâmetros podem ser interpretados da seguinte forma: α_x representa o nível médio de mortalidade específica de cada idade ao longo do tempo e β_x indica as

variações que ocorrem na mortalidade específica de cada idade como resposta às variações do parâmetro k_t , que é a tendência temporal da mortalidade.

Os autores verificaram que este modelo é sobre parametrizado, já que se os vetores $\alpha = \{\alpha_x, x = (x_1, \dots, x_n)\}$, $\beta = \{\beta_x, x = (x_1, \dots, x_n)\}$ e $k = \{k_t, t = (t_1, \dots, t_k)\}$ são solução do sistema, então também $\{\alpha_x\}$, $\{\beta_x \times c\}$ e $\left\{\frac{k_t}{c}\right\}$ com $c \neq 0$ o são.

De modo a garantir a existência de uma solução única, foram propostas duas restrições que asseguram a identificação do modelo:

$$(7) \quad \sum_t k_t = 0 \quad e \quad \sum_x \beta_x = 1.$$

Para estimar os parâmetros a partir dos dados de mortalidade observados, é utilizado o método da decomposição em valores singulares, que permite obter uma solução dos mínimos quadrados. Note-se que o modelo não é um modelo de regressão, pois não existem regressores.

Os parâmetros são calculados de forma a minimizar

$$(8) \quad \sum_{x,t} (\ln m_x(t) - \alpha_x - \beta_x k_t)^2.$$

Uma vez estimados os parâmetros, é possível obter projeções da tendência temporal da mortalidade, o fator k_t , através de um modelo ARIMA.

Lee & Carter (1992) aplicam a metodologia Box-Jenkins à série temporal $\{k_t\}$ previamente estimada, sendo então recomendada a aplicação de um modelo ARIMA(0,1,0), que se traduz simplesmente num passeio aleatório com *drift*. Assim, tem-se

$$(9) \quad k_t^* = \mu + k_{t-1} + \varepsilon_t, \text{ para } t > t_k.$$

Posteriormente, Brouhns *et al.* (2002a) implementaram uma extensão do modelo, com vista à substituição dos termos aleatórios $\varepsilon_x(t)$ em (6) por uma variação aleatória

proveniente da inclusão de uma regressão de Poisson. Justificam essa opção por considerarem que o número de mortes pode ser representado por uma variável aleatória que segue a distribuição de Poisson. Nesse caso, tem-se

$$(10) \quad D_{xt} \sim \text{Poisson}(E_{xt}\mu_x(t)), \quad \text{com } \mu_x(t) = \exp(\alpha_x + \beta_x k_t),$$

continuando os parâmetros sujeitos às restrições (7). Deve notar-se que a força de mortalidade $\mu_x(t)$ acima tem a mesma forma da do modelo Lee-Carter apresentado em (6), assumindo o pressuposto (3). Nesta nova abordagem, os parâmetros α_x , β_x e k_t são estimados pela maximização do logaritmo da função de verosimilhança,

$$(11) \quad \ell(\alpha, \beta, k) = \sum_{x,t} \{D_{xt}(\alpha_x + \beta_x k_t) - E_{xt} \exp(\alpha_x + \beta_x k_t)\},$$

mas a presença do termo $\beta_x k_t$, não permite que se tenha um Modelo Linear Generalizado.

Brouhns *et al.* (2002a) aplicam um método iterativo baseado no algoritmo de Newton-Raphson, atribuído a Goodman (1979), onde em cada iteração se procura convergir para a estimativa de máxima verosimilhança do parâmetro em estudo. O critério de paragem utilizado é um incremento muito pequeno (inferior a 10^{-10}) do logaritmo da função de verosimilhança. O processo iterativo pode ser consultado no Anexo A.

Em relação às projeções da tendência temporal da mortalidade, Brouhns *et al.* (2002a) não alteram a parte relativa à utilização do passeio aleatório com *drift*, pelo que, também neste trabalho, o modelo ARIMA (0,1,0) será utilizado.

As previsões das probabilidades de morte são determinadas utilizando os parâmetros α_x , β_x e as previsões obtidas para k_t , k_t^* , com recurso a

$$(12) \quad \begin{aligned} (a) \quad & q_x(t) = 1 - e^{-\mu_x(t)}, t > t_k, \\ (b) \quad & \mu_x(t) = \exp(\alpha_x + \beta_x k_t^*). \end{aligned}$$

Saliente-se que todos os modelos da família Lee-Carter têm uma natureza extrapolativa, ou seja, baseiam-se na suposição de que as tendências registadas no passado se mantêm no futuro. Qualquer melhoria (ou deterioração) em termos de mortalidade, por via de avanços científicos na área da medicina, alterações no estilo de vida da população, entre outros, é ignorada pelo modelo (Brouhns *et al.*, 2002a). Autores como Gutterman & Vanderhoof (1999) criticam esta hipótese, defendendo que tais mecanismos são importantes e não devem ser esquecidos. Outros autores (Brouhns *et al.*, 2002a; Wilmoth, 2000) entendem que se trata de mecanismos subjacentes aos avanços científicos, ainda não suficientemente compreendidos, razão pela qual a sua aplicação não é por enquanto praticável, continuando os métodos de extrapolação a ser uma opção robusta no caso da mortalidade humana.

3.3. Método de Denuit e Goderniaux

Também foi referido que, devido à dificuldade do modelo Poisson-Lee-Carter para produzir bons resultados relativamente à população com idades mais avançadas (90 anos ou mais), existe a necessidade de recorrer a um outro tipo de modelo, que permita extrapolar as probabilidades de morte para essas idades. O método escolhido deve ser consistente com as tendências da mortalidade detetadas em tal faixa etária, tanto a nível nacional como internacional. Em particular, deve ser consistente com a evidência empírica, que sugere uma desaceleração no crescimento das correspondentes probabilidades de morte (Documento Metodológico - Operação estatística: Tábuas Completas de Mortalidade, INE).

Por tudo isto, será utilizado o Método de Denuit e Goderniaux (Denuit & Goderniaux, 2005), que assenta numa regressão log-quadrática da forma

$$(13) \quad \ln q_x(t) = a_t + b_t x + c_t x^2 + \varepsilon_{xt}, \quad \varepsilon_{xt} \sim N(0, \sigma^2),$$

ajustada separadamente para cada ano t e para um determinado intervalo de idades.

São necessárias duas condições de fecho de tabela,

$$(14) \quad \begin{cases} q_{x_{max}}(t) = 1 \\ q'_{x_{max}}(t) = 0 \end{cases} \quad \forall t.$$

A primeira condição impõe uma idade máxima para a vida humana. Segundo Wilmoth (2000), a duração da vida humana não mostra sinais de se aproximar de um limite imposto pela biologia, ou outros fatores: pelo menos teoricamente, pode ser infinita. Deste modo, a escolha de uma duração máxima é subjetiva e cada investigador escolhe o valor de x_{max} que lhe parece mais acertado. Como exemplo, veja-se Cossette *et al.* (2007), que recorrem também ao método de Denuit e Goderniaux e escolhem o valor $x_{max} = 130$, justificando que é razoável assumir que esta idade-limite não será ultrapassada. Para os efeitos do presente trabalho, escolheu-se $x_{max} = 125$, por razões semelhantes.

A segunda condição garante que não haverá um decréscimo nas probabilidades de morte para as idades mais avançadas. Em conjunto, garante-se que a curva terá uma forma côncava e uma tangência horizontal no ponto $x = 125$ (Denuit & Goderniaux, 2005). Procura-se assim ir ao encontro de estudos demográficos que mostram que a mortalidade para as idades mais avançadas tende a aumentar a um ritmo mais lento (Cossette *et al.*, 2007; Horiuchi & Wilmoth, 1998).

Denuit e Goderniaux mostram que a imposição de (14) à regressão log-quadrática (13) resulta na igualdade

$$(15) \quad a_t + b_t x + c_t x^2 = c_t (125 - x)^2,$$

ou seja, o modelo assume a forma

$$(16) \quad \ln q_x(t) = c_t (125 - x)^2 + \varepsilon_{xt}, \quad \varepsilon_{xt} \sim N(0, \sigma^2),$$

para todos os anos de calendário.

3.4. Métodos Relacionais

Pelas razões também já adiantadas, os modelos Poisson-Lee-Carter e de Denuit e Goderniaux têm que ser complementados por um modelo relacional. Neste trabalho, irá proceder-se à comparação de dois métodos relacionais alternativos: um modelo relacional tipo-Brass (Brass, 1974), utilizado por Brouhns *et al.* (2002a), e um modelo relacional baseado no modelo de riscos proporcionais de Cox (Cox, 1972), apresentado por Delwarde *et al.* (2004).

3.4.1 Modelo Relacional tipo-Brass

Os modelos relacionais tipo-Brass relacionam as experiências de mortalidade de duas populações, a da população em *estudo* ($\mu_{x,t}^{est}$) e a da população de *referência* ($\mu_{x,t}^{ref}$), com recurso a uma relação da forma

$$(17) \quad f(\mu_{x,t}^{est}) = a + b \times f(\mu_{x,t}^{ref}).$$

Brouhns *et al.* (2002a) sugerem como exemplos para $f(\cdot)$ a função logarítmica e a função logit (Cramer, 2003). Os parâmetros são estimados com recurso a uma regressão linear. Para poderem obter as projeções referentes à população em estudo, recorrendo às projeções da população de referência, assumem que a relação (17) se mantém válida ao longo do tempo e para todas as idades.

Neste caso, a população em estudo é a população de fundos de pensões e a população de referência é a população geral portuguesa. Pode adiantar-se que uma comparação preliminar permitiu concluir que a função logarítmica fornece o melhor dos dois ajustamentos. Desta constatação, e da hipótese segundo a qual a relação (17) se mantém válida ao longo do tempo e para todas as idades, resulta o modelo tipo-Brass

$$(18) \quad \ln(\mu_x^{est}(t)) = a + b \times \ln(\mu_x^{ref}(t)), \quad \text{para } t > t_k.$$

3.4.2 Modelo de Riscos Proporcionais de Cox

A hipótese de partida no modelo de riscos proporcionais de Cox (Cox, 1972; Delwarde *et al.*, 2004) estabelece que a força de mortalidade do grupo em estudo é proporcional à de uma população de referência, sendo o fator de proporcionalidade independente das idades. Desta forma, tem-se

$$(19) \quad \mu_{x,t}^{est} = a \times \mu_{x,t}^{ref},$$

onde

$$(20) \quad \mu_{x,t}^j = \frac{d_{x,t}^j}{E_{x,t}^j}, \text{ com } j = est, ref$$

é a força de mortalidade. O parâmetro a é estimado com recurso a uma regressão linear. Também aqui se assume que a relação (19) se mantém válida ao longo do tempo e para todas as idades, isto é, que

$$(21) \quad \mu_{x,t}^{est}(t) = a \times \mu_x^{ref}(t), \quad \text{para } t > t_k.$$

Naturalmente, na implementação deste modelo, a população de referência continua a ser a população geral portuguesa e o grupo em estudo é a população portuguesa de fundos de pensões.

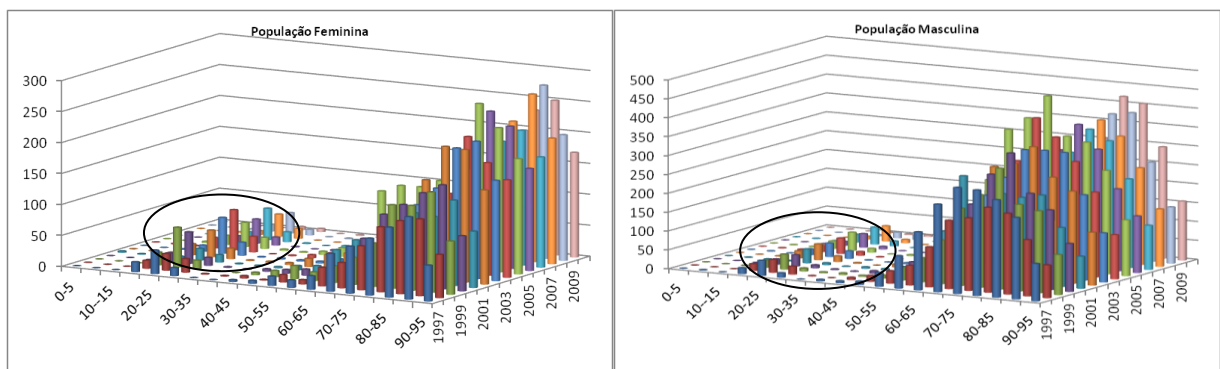
A alternativa, entre (18) e (21), que melhor servir os propósitos do trabalho será selecionada para ligar as duas populações, concluindo assim o processo de construção das tábuas de mortalidade dinâmicas para a população de fundos de pensões.

3.5. Aplicação

3.5.1. Dados

Para executar a metodologia apresentada nos pontos anteriores são necessários dados relativos à população portuguesa de pensionistas dos fundos de pensões e à população geral portuguesa, por idade e género.

Os dados da população portuguesa de pensionistas dos fundos de pensões, em particular o número de mortes d_{xt} e o número E_{xt} de indivíduos expostos ao risco, foram disponibilizados pelo ISP e são relativos ao período de 1997 a 2011. Uma breve análise permite verificar que no período em causa foi registado um aumento da população de pensionistas na ordem dos 35%, situando-se em 2011 perto dos 104 mil indivíduos. Verifica-se ainda que o número de homens é significativamente superior ao das mulheres, numa razão média de 1,8 homens por cada mulher. Na Figura 1 pode observar-se a informação relativa ao número de mortes nesta população.



Fonte: Instituto de Seguros de Portugal

Figura 1 – Número de mortes na população portuguesa de pensionistas dos fundos de pensões feminina (esquerda) e masculina (direita)

Verifica-se a existência de uma bossa para as idades entre os 20 e os 25 anos (mais pronunciada nas mulheres), bem como a quase inexistência de dados, em especial nas idades mais jovens, em ambos os sexos.

A bossa tem uma explicação: quando se procede à recolha de dados, embora o objetivo seja a contabilização das “mortes físicas”, em alguns casos é reportada a informação referente a todas as situações que levam à cessação do direito ao benefício, incluindo pensões de orfandade e viuvez. Na sua maioria, os planos de pensões estabelecem a idade de 24 anos como idade limite para o recebimento da pensão de orfandade, sendo esta a razão do pico aí registado (Relatório do Sector Segurador e dos Fundos de Pensões 2008, ISP). Outros picos, observados noutras idades, devem-se à cessação do direito à pensão de viuvez por remaridação. O facto de

tais “mortes” não serem distinguíveis das mortes reais, faz com que os dados correspondentes a estas idades não possam ser utilizados. Esta circunstância, e também o já referido reduzido número de anos disponíveis, obrigam a considerar que só os dados correspondentes às idades entre os 60 e os 90 anos contêm qualidade suficiente para serem utilizados. Estas são as razões que levam a recorrer à população portuguesa e aos modelos relacionais, no entendimento de que a população de fundos de pensões é uma subpopulação daquela.

Relativamente à população portuguesa, estão disponíveis na *Human Mortality Database* os dados relativos ao número de mortes d_{xt} e ao número E_{xt} de expostos ao risco, de 1940 a 2009. Foram considerados os últimos 50 anos e as idades do conjunto $\{0,1, \dots, 90\}$. Verifica-se, em conformidade com o que se regista noutros países desenvolvidos, um aumento gradual da esperança média de vida não só à nascença como também noutras idades, incluindo os 65 anos, como se observa na Tabela I.

Tabela I – Esperança média de vida da população portuguesa

Esperança média de Vida	2003-2005	2004-2006	2005-2007	2006-2008	2007-2009	2008-2010	2009-2011
À nascença							
População Total	77,69	78,17	78,48	78,7	78,88	79,2	79,55
Homens	74,38	74,84	75,18	75,49	75,8	76,14	76,47
Mulheres	80,81	81,3	81,57	81,74	81,8	82,05	82,43
Aos 65 anos							
População Total	17,58	17,89	17,99	18,13	18,19	18,47	18,75
Homens	15,68	15,97	16,07	16,25	16,36	16,64	16,92
Mulheres	19,05	19,37	19,48	19,61	19,67	19,89	20,2

Fonte: INE I.P. Estatísticas Demográficas e Estimativas Provisórias de População Residente 2001-2009

3.5.2. Modelo Poisson-Lee-Carter

A estimação (da população portuguesa) seguiu o seguinte percurso:

1. Estimação dos parâmetros (α, β, k) , $\alpha = \{\alpha_x, x = (0, \dots, 90)\}$, $\beta = \{\beta_x, x = (0, \dots, 90)\}$ e $k = \{k_t, t = (1960, \dots, 2009)\}$, pelo Método de Máxima Verosimilhança, para homens e mulheres em separado.

Deve notar-se que o critério de convergência implementado no *software* R, aqui utilizado, é diferente do definido por Brouhns *et al.* (2002a); monitoriza-se a função de desvio associada, conforme sugerido por Renshaw & Haberman (2006),

$$(22) \quad D(d_{xt}, \hat{d}_{xt}) = \sum_{x,t} 2 \left\{ d_{xt} \ln \left(\frac{d_{xt}}{\hat{d}_{xt}} \right) - (d_{xt} - \hat{d}_{xt}) \right\}, \hat{d}_{xt} = E_{xt} \exp (\alpha_x + \beta_x k_t).$$

Os valores obtidos estão no Anexo B. A Figura 2 ilustra o resultado deste processo de estimação. A análise gráfica dos parâmetros mostra que o seu comportamento é semelhante ao apresentado em estudos realizados com dados de outros países, nomeadamente, Bélgica (Brouhns *et al.*, 2002a) e Espanha (Débon *et al.*, 2006).

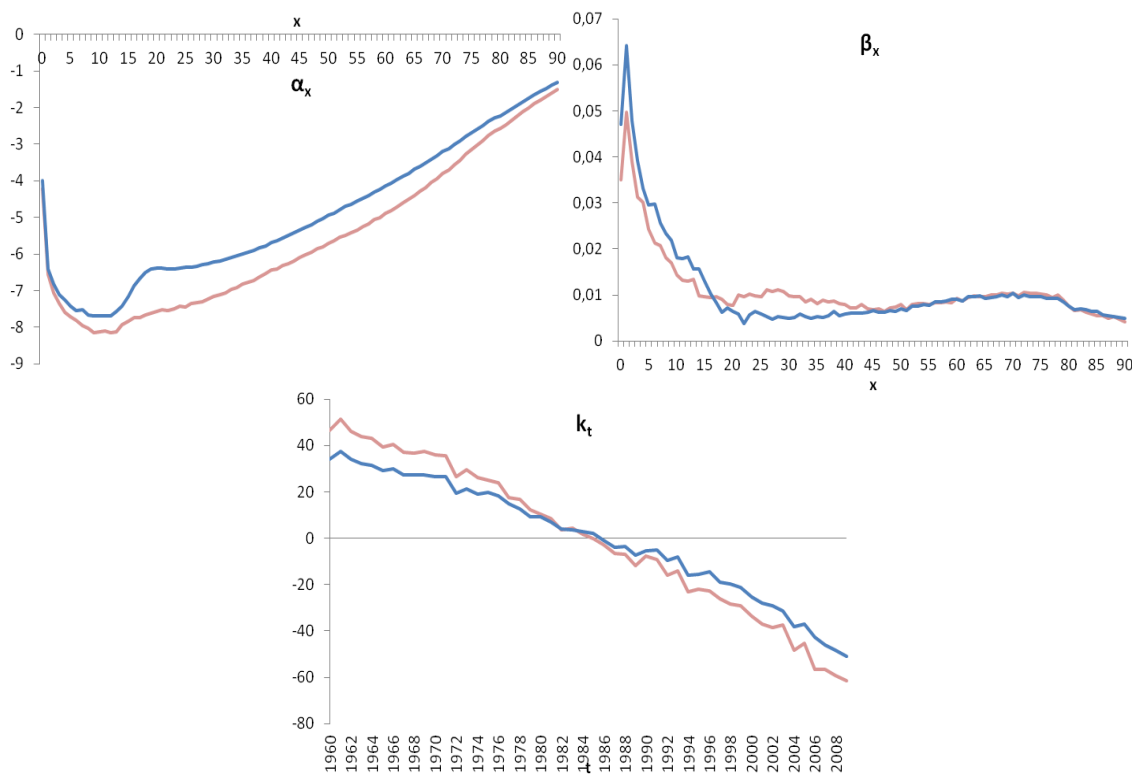


Figura 2 – Parâmetros do modelo Poisson-Lee-Carter para homens (a azul) e mulheres (a rosa)

2. Estimação dos parâmetros do modelo ARIMA(0,1,0), ver equação (9), usando o Método de Máxima Verosimilhança. Os resultados estão na Tabela II.

Tabela II – Parâmetros do modelo ARIMA(0,1,0) para homens e mulheres

ARIMA (0,1,0)	Homens	Mulheres
Drift μ	-1,73471	-2,206617
Variância σ^2	5,609039	11,7614

3. Projeção do parâmetro k_t , por um período de 125 anos (de 2009 até 2134), por conveniência relativamente à construção da tabela. Os valores obtidos podem ser consultados no Anexo C.

Neste ponto, (12b) possibilita dispor de duas matrizes, $[\mu_{M,x}^{ref}(t)]_{91 \times 126}$ e $[\mu_{H,x}^{ref}(t)]_{91 \times 126}$, $x \in \{0,1, \dots, 90\}$, $t \in \{2009, \dots, 2134\}$, com os valores projetados da força de mortalidade obtidos pelo modelo Poisson-Lee-Carter para mulheres e homens, respetivamente. Relembre-se que o ano de referência da tabela é 2009, o último para o qual há dados disponíveis.

3.5.3. Modelo de Denuit e Goderniaux

Conhecidas $[\mu_{M,x}^{ref}(t)]_{91 \times 126}$ e $[\mu_{H,x}^{ref}(t)]_{91 \times 126}$, avança-se com o método de Denuit e Goderniaux para o fecho de tabela, ver a equação (16). Aplicando (12a) a $[\mu_{M,x}^{ref}(t)]_{91 \times 126}$ e $[\mu_{H,x}^{ref}(t)]_{91 \times 126}$, calculam-se $[q_{M,x}^{ref}(t)]_{91 \times 126}$ e $[q_{H,x}^{ref}(t)]_{91 \times 126}$. O recurso a regressões lineares – uma por cada ano de projeção – permite estender os valores de $q_x^{ref}(t)$ para as idades entre os 90 e os 125 anos (restrições de dimensão do relatório impedem a transcrição destas regressões).

Obtém-se assim duas matrizes com as probabilidades de morte projetadas para as idades entre os 0 e os 125 anos e os anos de 2009 a 2134, $Q_M^{ref} = [q_{M,x}(t)]_{126 \times 126}$ e $Q_H^{ref} = [q_{H,x}(t)]_{126 \times 126}$, para a população portuguesa feminina e masculina, respetivamente. Por conveniência, tendo em vista as equações (18) e (21), usa-se novamente (12) para converter Q_M^{ref} e Q_H^{ref} em $M_M^{ref} = [\mu_{M,x}(t)]_{126 \times 126}$ e $M_H^{ref} = [\mu_{H,x}(t)]_{126 \times 126}$.

3.5.4. Modelo relacional

Para obter finalmente os valores para a população de fundos de pensões, é necessário encontrar o modelo relacional mais adequado. As opções são um modelo tipo-Brass ou o modelo de riscos proporcionais de Cox. Foram selecionados os dados entre os 60 e os 90 anos, por razões já referidas em 3.5.1., utilizando os dados agrupados para o período entre 2007 e 2009. A escolha deste período baseou-se no facto de serem os dados mais recentes comuns a ambas as populações.

O modelo tipo-Brass (17) já havia sido estimado e procedeu-se então à estimação do modelo de Cox (19). Em ambos os casos usou-se o *software* Excel. Apresentam-se de seguida os resultados para o modelo selecionado, o modelo de riscos proporcionais de Cox (19). Os resultados para o modelo tipo-Brass (17) estão no Anexo D.

Tabela III – Parâmetros do modelo de riscos proporcionais de Cox para homens e mulheres

Modelo de Riscos Proporcionais de Cox	Homens	Mulheres
Parâmetro α	0,73887	0,76666
Erros Padrão σ_ϵ	0,01352	0,01445

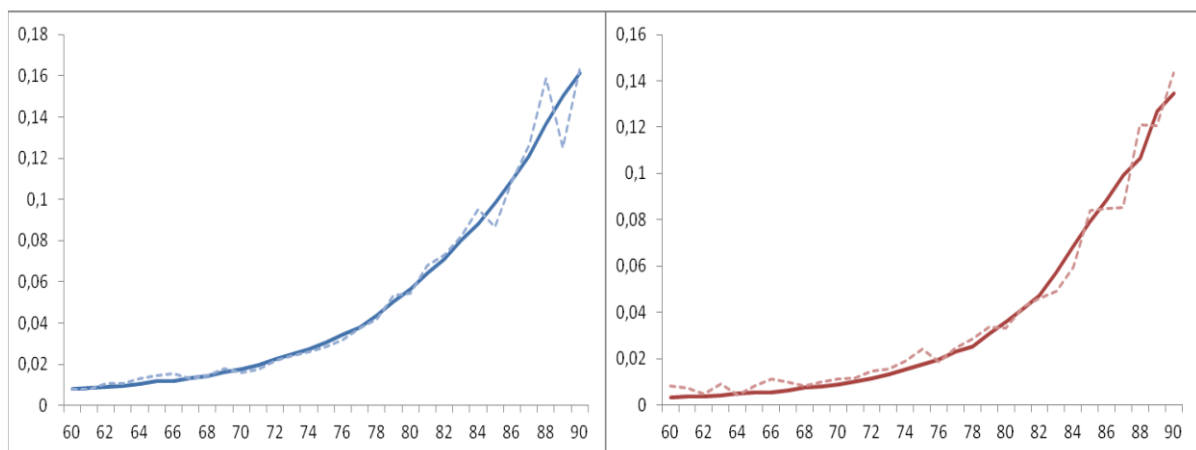


Figura 3 – Comparação dos valores de μ_x (a tracejado) com os valores do modelo de riscos proporcionais de Cox (a cheio) para homens (esquerda) e mulheres (direita)

A análise dos ajustamentos mostra que o modelo relacional tipo-Brass proporciona uma maior aderência aos dados, mas não é inteiramente validado pela evidência empírica, no sentido em que leva a concluir que a mortalidade da população de fundos de pensões é superior à da população total. Em geral, acredita-se que esta última é que experimenta uma maior mortalidade, pois os indivíduos cobertos por planos de pensões são normalmente indivíduos com maior poder monetário e mais cuidadosos com o futuro (Barrieu *et al.*, 2012). Como se lê em Dickson *et al.* (2011), p.54 «(...) *the wealthier you are likely to be, the lower your mortality rates.*».

Muito embora a escolha tenha recaído sobre o modelo de Cox, é importante referir que, especialmente para as mulheres com idades inferiores a 75 anos, não se consegue um ajustamento muito satisfatório. Em grande parte isto deve-se à qualidade e reduzido número de observações, conforme já foi referido. Apesar de se considerar que a faixa entre os 60 e os 90 anos tem qualidade suficiente para ser utilizada, a possibilidade de persistirem erros não pode ser ignorada. Quer dizer: optou-se por adotar o modelo de riscos proporcionais de Cox por questões de coerência com a experiência empírica e também pelo facto de não existir confiança suficiente nos dados da população de fundos de pensões que permita afirmar que Portugal é, efetivamente, uma exceção à regra.

Estando disponíveis $M_M^{ref} = [\mu_{M,x}^{ref}(t)]_{126 \times 126}$ e $M_H^{ref} = [\mu_{H,x}^{ref}(t)]_{126 \times 126}$ e estimado o modelo relacional (21), é imediata a obtenção das matrizes com as probabilidades de morte projetadas para a população portuguesa de fundos de pensões, $Q_M^{FP} = [q_{M,x}^{FP}(t)]_{126 \times 126}$ e $Q_H^{FP} = [q_{H,x}^{FP}(t)]_{126 \times 126}$.

Atendendo aos objetivos do estudo, só a parte triangular inferior das matrizes Q_M^{FP} e Q_H^{FP} é considerada. Assim, reorganizou-se a informação nelas contida, de forma a tornar a leitura das tábuas mais intuitiva. A título ilustrativo, veja-se o Anexo E. Note-

-se que cada elemento da matriz pode agora ser representado por $q_{x+k}^{FP}(t+k)$, onde t é o ano de referência da tabela, que neste trabalho é o ano 2009, e $k = 0, 1, \dots, 125$ é o número de anos projetados em relação ao ano de referência.

3.5.5. Comparação com outras tábuas de mortalidade

Uma vez obtidas as tábuas de mortalidade dinâmicas é interessante compará-las com as tábuas de mortalidade mais comumente utilizadas no mercado português de fundos de pensões. Torna-se assim possível contabilizar o potencial impacto da introdução das tábuas dinâmicas na avaliação das responsabilidades.

Como indicadores, recorre-se aos valores $e_{65}(2009)$, a esperança média de vida aos 65 anos, e também ao cálculo dos valores $a_x(2009)$, ou seja, os valores atuariais de uma anuidade sobre a vida de um indivíduo com idade x . A escolha do ano de comparação recai sobre 2009 por ser o ano de referência das tábuas dinâmicas construídas, podendo no entanto ter sido considerado um ano mais recente.

De acordo com a última informação divulgada pelo ISP (Relatório do Sector Segurador e dos Fundos de Pensões 2011, ISP), a tabela francesa TV 88/90 é a mais utilizada como pressuposto de mortalidade dos beneficiários na determinação de responsabilidades dos planos de pensões de benefício definido, (45% dos planos recorre exclusivamente a essa tabela). Ainda assim, a sua antecessora, a tabela TV 73/77, é recorrentemente usada em Portugal (cerca de 26% dos planos aplica exclusivamente essa tabela).

Em primeiro lugar, calcularam-se os valores $e_{65}(2009)$ usando (3) e procedeu-se à sua comparação, conforme ilustrado na Tabela IV.

Tabela IV – Esperança média de vida aos 65 anos

e_{65}	TV 73/77	TV 88/90	T.D. Homens	T.D. Mulheres
	17,35	19,76	20,37	23,73

3. Tábuas de Mortalidade Dinâmicas

Verifica-se que a esperança média de vida aos 65 anos para as mulheres é bastante superior aos valores obtidos através das tábuas TV 73/77 e TV 88/90, com diferenças a rondar os 6,5 e os 4 anos, respetivamente. No caso masculino, as diferenças não são tão vincadas, correspondendo a pouco mais de meio ano, no caso da TV 88/90.

Para o cálculo dos valores $a_x(2009)$, foram escolhidas, a título ilustrativo, três taxas de desconto: $i_1=3\%$, $i_2=4\%$ e $i_3=5\%$, de forma a atender ao efeito do desconto na análise do impacto da utilização de tábuas distintas. O cálculo foi então efetuado usando (1) para indivíduos com idades 55, 60, 65, 70 e 75 e considerando sucessivamente as tábuas TV 73/77, TV 88/90 e as tábuas de mortalidade dinâmicas, por género, construídas neste trabalho. Os resultados são apresentados na Tabela V.

Tabela V – Valor atuarial de anuidades vitalícias em diferentes situações – as tábuas TV vs. as tábuas dinâmicas

a_x	3%				4%				5%			
	T.D. Homens (1)	T.D. Mulheres (2)	TV 73/77 (3)	TV 88/90 (4)	T.D. Homens (5)	T.D. Mulheres (6)	TV 73/77 (7)	TV 88/90 (8)	T.D. Homens (9)	T.D. Mulheres (10)	TV 73/77 (11)	TV 88/90 (12)
x=55	18,47	20,35	16,83	18,09	16,22	17,69	14,98	15,97	14,38	15,54	13,43	14,22
x=60	16,38	18,30	14,76	16,10	14,59	16,15	13,32	14,41	13,10	14,37	12,09	12,99
x=65	14,12	15,98	12,51	13,92	12,77	14,33	11,45	12,64	11,61	12,93	10,53	11,54
x=70	11,74	13,44	10,18	11,56	10,78	12,24	9,44	10,65	9,94	11,21	8,80	9,86
x=75	9,34	10,76	7,89	9,14	8,70	9,96	7,42	8,54	8,13	9,25	6,99	8,01
Impacto	3%				4%				5%			
	Homens TV 73/77 (13)=(1)/(3)-1	Mulheres TV 73/77 (14)=(2)/(3)-1	Homens TV 88/90 (15)=(1)/(4)-1	Mulheres TV 88/90 (16)=(2)/(4)-1	Homens TV 73/77 (17)=(5)/(7)-1	Mulheres TV 73/77 (18)=(6)/(5)-1	Homens TV 88/90 (19)=(5)/(8)-1	Mulheres TV 88/90 (20)=(6)/(8)-1	Homens TV 73/77 (21)=(9)/(11)-1	Mulheres TV 73/77 (22)=(10)/(11)-1	Homens TV 88/90 (23)=(9)/(12)-1	Mulheres TV 88/90 (24)=(10)/(12)-1
x=55	9,7%	20,9%	2,1%	12,5%	8,2%	18,1%	1,6%	10,8%	7,0%	15,7%	1,1%	9,3%
x=60	10,9%	24,0%	1,7%	13,7%	9,5%	21,2%	1,3%	12,1%	8,3%	18,8%	0,9%	10,7%
x=65	12,8%	27,7%	1,4%	14,9%	11,5%	25,1%	1,0%	13,4%	10,3%	22,8%	0,7%	12,1%
x=70	15,4%	32,0%	1,5%	16,2%	14,1%	29,6%	1,2%	14,9%	13,0%	27,4%	0,8%	13,7%
x=75	18,5%	36,5%	2,2%	17,7%	17,3%	34,3%	1,8%	16,5%	16,3%	32,3%	1,5%	15,5%

Verifica-se que o impacto em relação às tábuas TV é, no geral, elevado, principalmente no que diz respeito às mulheres. Há assim razões para crer, à luz das tábuas dinâmicas agora obtidas, que a tábua TV 73/77 se encontra desajustada à mortalidade experimentada pela população portuguesa de fundos de pensões, sendo que, no caso da população feminina, também a tábua TV 88/90 não permite refletir adequadamente o respetivo perfil de mortalidade.

Na verdade, mesmo que a dada altura as tábuas TV se adaptassem à população em causa, são tábuas de mortalidade estáticas e contam atualmente mais de 30 anos, o que implica que não têm em conta os aumentos de longevidade. Mais ainda, as tábuas dinâmicas aqui construídas admitem uma idade máxima de 125 anos, enquanto para a TV 73/77 a idade máxima é 106 anos e para a TV 88/90 é 110 anos, o que também introduz ligeiras diferenças.

Como exemplo ilustrativo do impacto que as tábuas de mortalidade exercem no cálculo dos valores atuariais das responsabilidades, assuma-se uma carteira de pensionistas composta por 100 indivíduos do sexo masculino, com 65 anos de idade e pensão anual de 15.000 euros e 50 indivíduos do sexo feminino, também com 65 anos e pensão anual de 12.000 euros. Considere-se um fundo de pensões que apenas financia as responsabilidades associadas a essa carteira e que o nível de financiamento (i.e., o quociente entre o valor dos ativos e o valor atual das pensões em pagamento), calculado com base numa taxa de desconto de 4% e a tábua TV 73/77, é igual a 100%.

Conclui-se facilmente que o montante necessário para fazer face às responsabilidades futuras com estes indivíduos é de $100 \times 15.000 \times 11,45 + 50 \times 12.000 \times 11,45 = 24.045.000$ euros. Ora, se o cálculo fosse efetuado com base nas tábuas de mortalidade dinâmicas, mantendo os restantes pressupostos inalterados, o resultado seria de $100 \times 15.000 \times 12,77 + 50 \times 12.000 \times 14,33 = 27.753.000$ euros. Tal significa que a alteração das tábuas de mortalidade implica um aumento do valor das responsabilidades do fundo em $27.753.000 - 24.045.000 = 3.708.000$ euros.

Consequentemente, o nível de financiamento passaria de 100% para $\frac{24.045.000}{27.753.000} = 86,64\%$ o que indica a existência de um subfinanciamento do fundo de pensões.

Apesar da simplicidade deste exemplo, verifica-se que a diferença provocada pela alteração da tábua de mortalidade utilizada pode ser bastante significativa.

4. Avaliação do Risco de Longevidade

De uma forma sucinta, o risco de longevidade representa o risco de um indivíduo sobreviver para além do inicialmente previsto, surgindo portanto quando as probabilidades de morte são sistematicamente inferiores às esperadas. Em termos de cálculo do valor atual das responsabilidades associadas a planos de pensões de benefício definido, as tábuas de mortalidade dinâmicas, ao incorporar incrementos futuros de longevidade, ajudam a capturar parte deste risco. Ainda assim, não o eliminam por completo, pois a tendência futura de mortalidade é aleatória, o que implica que poderá haver desvios sistemáticos em relação às previsões obtidas, independentemente do modelo utilizado (Pitacco, 2002), materializando-se num aumento do valor atual das responsabilidades a financiar.

Esta possibilidade é considerada nas especificações técnicas do QIS realizado no âmbito da revisão da Diretiva IORP, mais especificamente na determinação do SCR, através da aplicação de uma fórmula padrão, cuja calibragem corresponde ao *Value-at-Risk* para um nível de confiança a 99,5% a um ano. Como já mencionado, a avaliação do risco de longevidade assenta no recálculo da melhor estimativa das provisões técnicas, aplicando um choque nas probabilidades de morte que as reduz em 20% (SCR.7.28 das especificações técnicas). Formalmente, tem-se

$$(23) \quad q_x^{choque}(t) = (1 - 0,2) \times q_x(t), \text{ para todas as idades.}$$

Posteriormente, as probabilidades de morte neste cenário são utilizadas para se recalcularem o valor atual das responsabilidades. Evidentemente, esta abordagem constitui uma simplificação da realidade.

Em relação aos modelos de projeção de mortalidade, autores como Cairns (2000), Pitacco (2002; 2004), Nielsen (2010) e Richards *et al.* (2013) apresentam possíveis fontes de desvio para o risco de longevidade. Destacam-se as seguintes componentes:

- Risco de modelo: incerteza em relação ao modelo estocástico de mortalidade escolhido, que pode não representar de forma adequada os aumentos de longevidade no futuro.
- Risco de parâmetro: incerteza associada à estimação dos parâmetros do modelo de previsão da mortalidade.
- Risco de base: incerteza em relação à adequabilidade da população de referência utilizada para estimar a tendência futura de mortalidade, (não se sabe à partida se a população de referência representa apropriadamente a população em estudo).

Dada a sua natureza, estes são riscos apenas verificáveis no longo prazo. Contudo, o risco de longevidade é também afetado por alterações no curto prazo. A principal componente desta categoria é a volatilidade, proveniente de flutuações consideradas como temporárias em torno da tendência. As razões para estas flutuações podem ser, por exemplo, um surto viral ou condições ambientais mais severas num dado ano (Richards *et al.*, 2013).

Neste capítulo utilizar-se-ão duas abordagens para a avaliação do risco de longevidade, com vista à sua comparação com os resultados que seriam obtidos com a fórmula padrão proposta nas especificações técnicas do QIS: a simulação de Monte-Carlo, nos moldes em que foi aplicada por Brouhns *et al.* (2002b), e uma proposta recente, sugerida por Richards *et al.* (2013), onde o processo de simulação é baseado na metodologia *Value-at-Risk*, considerando o horizonte temporal de um ano. Ambas foram adaptadas, tendo em atenção o caso em estudo.

4.1. Simulação de Monte-Carlo

A simulação de Monte-Carlo tem como base os parâmetros α , β e k do modelo Poisson-Lee-Carter. Visto que estes são estimados pelo Método da Máxima Verossimilhança, a sua distribuição é assintoticamente Normal Multivariada com média

(α, β, k) e matriz de covariâncias \mathfrak{S}^{-1} , inversa da matriz de Informação de Fisher (Klugman *et al.*, 2008), sendo necessário especificá-la antes de iniciar o processo de simulação – ver Anexo F.

Ultrapassada esta etapa inicial, a v -ésima corrida percorre as seguintes etapas:

1. Simular os parâmetros $\{\alpha_x^{(v)}\}$, $\{\beta_x^{(v)}\}$ e $\{k_t^{(v)}\}$, para $x = x_1, \dots, x_n$ e $t = t_1, \dots, t_k$, com recurso à distribuição Normal Multivariada – ver Anexo F.
2. Estimar os parâmetros $\mu^{(v)}$ e $\sigma_\varepsilon^{(v)}$ do modelo ARIMA (0,1,0), usando os valores simulados $\{k_t^{(v)}\}$.
3. Gerar projeções da tendência temporal da mortalidade $\{k_t^{*(v)}\}$, recorrendo ao modelo ARIMA(0,1,0) estimado em 2. Os erros $\varepsilon_t^{*(v)}$ são gerados por meio de uma distribuição Normal com média 0 e desvio padrão $\sigma_\varepsilon^{(v)}$.
4. Projetar as probabilidades de morte (da população portuguesa).
5. Aplicar o modelo relacional estimado em 3.5 às probabilidades projetadas e calcular as probabilidades de morte $q_x^{FP(v)}(t)$ da população de fundos de pensões.
6. Calcular $a_x^{(v)}$ com base numa taxa de desconto i e nas probabilidades $q_x^{FP(v)}(t)$.

Os passos 1 a 6 são repetidos 10 000 vezes, por se considerar que este número de simulações será suficiente para a estabilidade dos resultados. Este é, aliás, o valor escolhido por Brouhns *et al.* (2002b). No final, é calculado o percentil de ordem 0,995 da distribuição de a_x .

4.2. Simulação baseada na metodologia *Value-at-Risk*

Este processo de simulação (Richards *et al.*, 2013) está ligado ao regime Solvência II e à proposta de revisão da Diretiva IORP, e nasce da necessidade de se responder ao problema da avaliação do risco de longevidade considerando um horizonte temporal de um ano.

Genericamente, o processo é baseado na simulação dos dados de mortalidade para o “ano seguinte” àquele para o qual se dispõe de informação. Os valores simulados são então acrescentados aos dados para calibrar o modelo Poisson-Lee-Carter e analisam-se as alterações daí resultantes nas projeções das probabilidades de morte.

Passos na v -ésima corrida:

1. Calcular, para a população geral portuguesa, o número de expostos ao risco inicial no ano $t + 1$, usando a relação $E_{x,t+1}^{inicial} \approx E_{x-1,t} - \frac{d_{x-1,t}}{2}$; t é o último ano para o qual existem dados.

2. Usar o modelo Poisson-Lee-Carter estimado no Capítulo 3 para gerar $k_{t+1}^{(v)} = \mu + k_t + \varepsilon_{t+1}^{(v)}$, sendo $\varepsilon_{t+1}^{(v)}$ gerado de uma distribuição Normal de média 0 e desvio padrão σ_ε (representa o desvio relativo à projeção efetuada para o ano t). O resultado é utilizado para calcular

$$(24) \quad q_x^{(v)}(t+1) = 1 - \exp(-\exp(\alpha_x + \beta_x k_{t+1}^{(v)})).$$

3. Gerar o número de mortes $d_{x,t+1}^{(v)}$ para cada idade x , em $t + 1$ (exceto $x = 0$, já que não é possível obter $E_{0,t+1}^{inicial}$), simulando observações de uma população binomial,

$$(25) \quad d_{x,t+1}^{(v)} \sim \text{Binomial}(E_{x,t+1}^{inicial}, q_x^{(v)}(t+1)).$$

O número de expostos ao risco em $t + 1$ é

$$(26) \quad E_{x,t+1}^{(v)} \approx E_{x,t+1}^{inicial} - \frac{d_{x,t+1}^{(v)}}{2}.$$

4. Acrescentar $d_{x,t+1}^{(v)}$ e $E_{x,t+1}^{(v)}$ aos dados reais da população portuguesa e usar o modelo Poisson-Lee-Carter e o conjunto alargado dos dados para projetar as probabilidades de morte (da população portuguesa).

5. Aplicar o modelo relacional estimado em 3.5 às probabilidades de morte projetadas e calcular as probabilidades $q_x^{FP(v)}(t)$ da população de fundos de pensões.

6. Calcular $a_x^{(v)}$ com base numa taxa de desconto i e nas probabilidades $q_x^{FP(v)}(t)$.

Os passos 2 a 6 são repetidos 1000 vezes, já que segundo Richards *et al.* (2013), para estimar o percentil em causa, 1000 simulações são suficientes. No final, é calculado o percentil de ordem 0,995 da distribuição de a_x .

4.3. Aplicação

Para efeitos de ilustração da variação do valor atual das responsabilidades procedeu-se ao cálculo do percentil 0,995 da distribuição de $a_x(t)$, ou seja, dos valores atuais esperados de uma anuidade sobre a vida de um indivíduo com idades 55, 60, 65, 70 e 75, usando três taxas de desconto, $i_1=3\%$, $i_2=4\%$ e $i_3=5\%$. Como referencial t escolheu-se uma vez mais o ano de 2009, por ser o último com informação disponível.

Por outro lado, calculou-se também o valor $a_x(t)$, utilizando as probabilidades de morte sujeitas ao choque permanente de 20%, ver (23), o que possibilitou a comparação com os resultados que seriam obtidos pela aplicação da fórmula padrão.

Os resultados deste processo são apresentados nas Tabelas VI e VII.

Tabela VI – Valor atuarial de anuidades vitalícias para homens a um nível de confiança de 99,5% e respetiva variação face à tábua de mortalidade dinâmica

a_x	3%				4%				5%			
	Média	Percentil 99,5%			Média	Percentil 99,5%			Média	Percentil 99,5%		
	T.D. Homens (1)	Choque 20% (2)	Monte Carlo (3)	VaR (4)	T.D. Homens (5)	Choque 20% (6)	Monte Carlo (7)	VaR (8)	T.D. Homens (9)	Choque 20% (10)	Monte Carlo (11)	VaR (12)
x=55	18,47	19,32	19,09	18,73	16,22	16,86	16,68	16,42	14,38	14,88	14,73	14,53
x=60	16,38	17,29	16,99	16,64	14,59	15,31	15,07	14,8	13,1	13,68	13,48	13,27
x=65	14,12	15,08	14,67	14,37	12,77	13,55	13,22	12,98	11,61	12,26	11,98	11,79
x=70	11,74	12,73	12,21	11,98	10,78	11,61	11,17	10,98	9,94	10,65	10,27	10,11
x=75	9,34	10,33	9,7	9,54	8,7	9,56	9,01	8,88	8,13	8,88	8,4	8,29
	3%				4%				5%			
	Variação Homens	Choque 20% (13)=(2)/(1)-1	Monte Carlo (14)=(3)/(1)-1	VaR (15)=(4)/(1)-1	Variação Homens	Choque 20% (16)=(6)/(5)-1	Monte Carlo (17)=(7)/(5)-1	VaR (18)=(8)/(5)-1	Variação Homens	Choque 20% (19)=(10)/(9)-1	Monte Carlo (20)=(11)/(9)-1	VaR (21)=(12)/(9)-1
x=55		4,6%	3,4%	1,4%		3,9%	2,8%	1,2%		3,5%	2,4%	1,0%
x=60		5,6%	3,7%	1,6%		4,9%	3,3%	1,4%		4,4%	2,9%	1,3%
x=65		6,8%	3,9%	1,8%		6,1%	3,5%	1,6%		5,6%	3,2%	1,6%
x=70		8,4%	4,0%	2,0%		7,7%	3,6%	1,9%		7,1%	3,3%	1,7%
x=75		10,6%	3,9%	2,1%		9,9%	3,6%	2,1%		9,2%	3,3%	2,0%

4. Avaliação do Risco de Longevidade

Tabela VII – Valor atuarial de anuidades vitalícias para mulheres a um nível de confiança de 99,5% e respetiva variação face à tábua de mortalidade dinâmica

a_x	3%				4%				5%			
	Média	Percentil 99,5%			Média	Percentil 99,5%			Média	Percentil 99,5%		
	T.D. Mulheres (1)	Choque 20% (2)	Monte Carlo (3)	VaR (4)	T.D. Mulheres (5)	Choque 20% (6)	Monte Carlo (7)	VaR (8)	T.D. Mulheres (9)	Choque 20% (10)	Monte Carlo (11)	VaR (12)
x=55	20,35	21,01	21,03	20,62	17,69	18,17	18,19	17,89	15,54	15,9	15,91	15,7
x=60	18,3	19,04	19	18,59	16,15	16,71	16,68	16,37	14,37	14,81	14,78	14,55
x=65	15,98	16,8	16,65	16,28	14,33	14,98	14,86	14,57	12,93	13,45	13,36	13,13
x=70	13,44	14,33	14,03	13,73	12,24	12,97	12,73	12,48	11,21	11,82	11,61	11,41
x=75	10,76	11,69	11,24	11,01	9,96	10,75	10,37	10,18	9,25	9,93	9,6	9,44
	3%				4%				5%			
	Variação Mulheres	Choque 20% (13)=(2)/(1)-1	Monte Carlo (14)=(3)/(1)-1	VaR (15)=(4)/(1)-1	Variação Mulheres	Choque 20% (16)=(6)/(5)-1	Monte Carlo (17)=(7)/(5)-1	VaR (18)=(8)/(5)-1	Variação Mulheres	Choque 20% (19)=(10)/(9)-1	Monte Carlo (20)=(11)/(9)-1	VaR (21)=(12)/(9)-1
x=55		3,2%	3,3%	1,3%		2,7%	2,8%	1,1%		2,3%	2,4%	1,0%
x=60		4,0%	3,8%	1,6%		3,5%	3,3%	1,4%		3,1%	2,9%	1,3%
x=65		5,1%	4,2%	1,9%		4,5%	3,7%	1,7%		4,0%	3,3%	1,5%
x=70		6,6%	4,4%	2,2%		6,0%	4,0%	2,0%		5,4%	3,6%	1,8%
x=75		8,6%	4,5%	2,3%		7,9%	4,1%	2,2%		7,4%	3,8%	2,1%

Para apurar a variação relativa, tomou-se como ponto de referência o valor atual esperado de uma anuidade vitalícia calculada com base nas tábuas de mortalidade dinâmicas construídas no capítulo anterior. Verifica-se, como era esperado, que para ambos os géneros a abordagem que exerce um menor impacto no recálculo do valor atual das responsabilidades é a simulação baseada na metodologia $VaR_{99,5\%}$ a um ano. A simulação de Monte-Carlo produz valores mais elevados, pois o horizonte temporal é de longo prazo. Quanto ao impacto causado pela aplicação do choque proposto na fórmula padrão, observa-se que é a proposta mais gravosa, sobretudo para as idades mais avançadas. É, claramente, uma proposta ditada pela simplicidade.

Retomando a ilustração apresentada no capítulo anterior, verifica-se que o recálculo do valor atuarial das responsabilidades resulta em 29.313.000 euros, 28.746.000 euros e 28.212.000 euros usando a fórmula padrão, a simulação de Monte Carlo e a simulação $VaR_{99,5\%}$, respetivamente. Desta forma, o sub módulo do SCR relativo ao risco de longevidade corresponde ao montante $29.313.000-27.753.000=1.560.000$ euros usando a fórmula padrão proposta pela EIOPA, $28.746.000-27.753.000=993.000$ euros, usando a simulação de Monte Carlo e, finalmente, $28.212.000-27.753.000=459.000$ euros usando a simulação $VaR_{99,5\%}$.

5. Conclusão

O principal objetivo deste trabalho centrou-se no estudo da mortalidade da população de fundos de pensões portuguesa, de modo a tornar possível a construção de tábuas de mortalidade dinâmicas específicas para o setor e a avaliação do risco de longevidade, tendo em conta os princípios propostos pela EIOPA no âmbito da revisão da Diretiva IORP.

O estudo revelou-se complexo, uma vez que por motivos de disponibilidade e qualidade dos dados, em vez da construção de tábuas de mortalidade dinâmicas de forma direta, se mostrou mais adequado adotar um método indireto: começar por obter valores para as probabilidades de morte com referência a uma população de maior dimensão e ajustar os resultados à população de fundos de pensões por meio de um modelo relacional. Verificou-se que, no geral, a qualidade do ajustamento é satisfatória, com algumas limitações no caso das mulheres.

Obtidas as tábuas de mortalidade dinâmicas, a principal conclusão passa pelas diferenças que estas apresentam, relativamente às tábuas mais comummmente utilizadas no mercado de fundos de pensões, a TV 73/77 e a TV 88/90, já que o impacto em termos de aumento do valor atual das responsabilidades provocado pela utilização de uma tábua dinâmica que, em princípio, refletirá mais adequadamente o perfil de mortalidade da população em causa bem como a respetiva evolução, é muito significativo. Este facto era à partida esperado, pois as tábuas TV têm natureza estática e não incorporam o aumento da longevidade observado nas últimas décadas.

Ainda assim, não é prudente considerar que o risco de longevidade é completamente eliminado quando se tem em conta a dinâmica da mortalidade. Por essa razão, este estudo passou também pela avaliação do risco de longevidade. Apresentaram-se duas

abordagens baseadas em horizontes temporais distintos (um ano e longo prazo), com o objetivo de proceder à comparação dos resultados com os que seriam obtidos por aplicação da fórmula padrão no âmbito da revisão da Diretiva IORP. O estudo das várias abordagens evidenciou que o risco de longevidade é um fenómeno complexo e que a escolha do método usado e respetiva calibragem influenciam fortemente os resultados. Efetivamente, apesar de a abordagem baseada na metodologia *Value-at-Risk* ser, por princípio, consistente com o cálculo do SCR no contexto da revisão da Diretiva IORP, verificou-se que a aplicação do choque de 20% nas probabilidades de morte proposto na fórmula padrão apresenta impactos mais próximos dos da simulação de Monte-Carlo.

No futuro, à medida que se for acumulando um maior referencial histórico, será interessante desenvolver tábuas dinâmicas recorrendo apenas a dados do setor. Para isso, é também necessário que haja melhorias ao nível da qualidade dos dados reportados pelas entidades gestoras (situação relativamente à qual o ISP tem vindo a desenvolver esforços, no sentido de que apenas sejam reportadas as mortes físicas, como vem referido no Relatório do Sector Segurador e dos Fundos de Pensões de 2008). Atendendo ao vasto leque de modelos existentes, outra possibilidade de investigação será a aplicação de outros modelos estocásticos, por exemplo, o modelo CBD ou a extensão do modelo Poisson-Lee-Carter que inclui o efeito *cohort*. A análise e comparação dos resultados permitirão aferir da influência do modelo na avaliação do risco de longevidade e, de certo modo, tomar em consideração o risco de modelo.

Globalmente, este estudo veio contribuir para aprofundar a compreensão do potencial impacto para o mercado português de fundos de pensões da proposta de revisão da Diretiva IORP, no que diz respeito a matérias relacionadas com a modelação da mortalidade.

Referências Bibliográficas

- Alho, J.M. (2002). Discussion of Lee (2000). *North American Actuarial Journal* 4 (1), 91-93.
- Barrieu, P., Bensusan, H., Ravanelli, C. e Hillairet, C. (2009). Understanding, modeling and managing longevity risk: key issues and main challenges. Disponível em: halshs.archives-ouvertes.fr/docs/00/41/78/00/PDF/preprint-longevite-chaireFBF.pdf.
- Barrieu, P., Bensusan, H., Ravanelli, C. e Hillairet, C. (2012). Understanding, modeling and managing longevity risk: key issues and main challenges. *Scandinavian Actuarial Journal* 2012:3, 203-231.
- Blaschke, E. (1923). Sulle tavole di mortalità variabili col tempo. *Giornale di Matematica Finanziaria* 5, 1-31.
- Brass, W. (1974). Mortality models and their uses in demography. *Transactions of the Faculty of Actuaries* 33, 123-132.
- Brouhns, N., Denuit, M. e Vermunt, J.K. (2002a). A Poisson log-bilinear regression approach to the construction of projected lifetables. *Insurance: Mathematics and Economics* 31, 373-393.
- Brouhns, N., Denuit, M. e Vermunt J.K. (2002b). Measuring longevity risk in mortality projections. *Bulletin of the Swiss Association of Actuaries* 2, 105-130.
- Brouhns, N., Denuit, M. e Van Keilegom, I. (2005). Bootstrapping the Poisson log-bilinear model for mortality forecasting. *Scandinavian Actuarial Journal* 3, 212-224.
- Cairns, A. J. G. (2000). A discussion of parameter uncertainty in insurance. *Insurance: Mathematics and Economics* 27 313-330.
- Cairns, A. J. G., Blake, D. e Dowd, K. (2006). A two-factor model for stochastic mortality with parameter uncertainty. *The Journal of Risk and Insurance* 73 (4), 687-718.
- Coale, A. e Kisker, E.E. (1990). Defects in data on old age mortality in the United States: new procedures for calculating approximately accurate mortality and lifetables at the highest ages. *Asian and Pacific Population Forum* 4, 1-31.

- Coelho, E., Bravo, J.M. e Magalhães, M.G. (2007). Mortality and longevity projections for the oldest-old in Portugal. Proceedings of the Joint Eurostat/UNECE Work Session on Demographic Projections.
- Comissão Europeia (2012). Quantitative Impact Study (QIS) on Institutions for Occupational Retirement Provision (IORPs) –Technical Specifications. Bruxelas.
- Comissão Europeia (2013). MEMO/13/454 – Occupational Pension Funds (IORP): next steps. Bruxelas.
- Cossette, H., Delwarde, A., Denuit, M., Guillot, F. e Marceau, E. (2007). Pension Plan valuation and mortality projection. *North American Actuarial Journal* 11, 1-34.
- Cox, D.R. (1972). Regression models and lifetables. *Journal of the Royal Statistical Society – Series B (Methodology)* 34 (2), 187-220.
- Cramer, J.S. (2003). The origins and development of the logit model. Disponível em: www.cambridge.org/resources/0521815886/1208_default.pdf
- Debón, A., Montes, F. e Puig, F. (2008). Modelling and forecasting mortality in Spain. *European Journal of Operational Research* 189, 624-637.
- Delwarde, A., Kachakhidze, D., Olie, L. e Denuit, M. (2004). Modèles linéaires et additifs généralisés, maximum de vraisemblance local et méthodes relationnels en assurance sur la vie. *Bulletin Français d'Actuariat* 6 (12), 77-102.
- Denuit, M. e Goderniaux, A.-C. (2005). Closing and projecting lifetables using log-linear models. *Bulletin de l'Association Suisse des Actuaires* 1, 29-49.
- Dickson, D. C. M., Hardy, M. R. e Waters, H. R. (2009). *Actuarial Mathematics for life contingent risks*, 1ª Ed. New York: Cambridge University Press.
- Diretiva 2003/41/EC do Parlamento Europeu e do Conselho de 3 de junho de 2003, relativa às atividades e à supervisão das instituições de realização de planos de pensões profissionais.
- European Insurance and Occupational Pensions Authority (2012). EIOPA's advice to the European Commission on the review of the IORP Directive 2003/41/EC.

- Goodman, L.A. (1979). Simple models for the analysis of association in cross-classifications having ordered categories. *Journal of the American Statistical Association* 74 (367), 537-552.
- Guttermann, S. e Vanderhoof, I.T. (1999). Forecasting changes in mortality: a search for a law of causes and effects. *North American Actuarial Journal* 2, 135-138.
- Hannerz, H. (2001). An extension of relational methods in mortality estimations. *Demographic Research* 4 (10), 337-368.
- Horiuchi, S. e Wilmoth, J.R. (1998). Deceleration in the age pattern of mortality at older ages. *Demography* 35 (4), 391-412.
- Instituto Nacional de Estatística (2010). Documento metodológico – operação estatística: tábuas completas de mortalidade. Disponível em: smi.ine.pt/DocumentacaoMetodologica/Detalhes/953.
- Instituto de Seguros de Portugal (1996). Norma Regulamentar nº 21/1996 de 5 de dezembro.
- Instituto de Seguros de Portugal (2008). Relatório do Sector Segurador e dos Fundos de Pensões 2008.
- Instituto de Seguros de Portugal (2011). Relatório do Sector Segurador e dos Fundos de Pensões 2011.
- Klugman, S.A., Panjer, H.H. e Willmot, G.E. (2008). *Loss Models: from Data to Decision*, 3ª Ed. New Jersey: John Wiley & Sons, Inc.
- Lee, R. D. (2000). The Lee-Carter method for forecasting mortality, with various extensions and applications. *North American Actuarial Journal* 4 (1), 80-93.
- Lee, R. D. e Carter, L. (1992). Modeling and forecasting U.S. mortality. *Journal of the American Statistical Association* 87 (419), 659-671.
- Makeham, W. M. (1860). On the law of mortality and the construction of annuity tables. *The Assurance Magazine and Journal of the Institute of Actuaries* 8 (6), 301-310.
- McGill, D.M. (1984). *Fundamentals of Private Pensions*, 5ª Ed. Illinois: Irwin.

- Nielsen, L.H. (2010). Assessment of longevity risk under Solvency II. *Life and Pension Risk, November Issue*, 41-44.
- Pitacco, E. (2002). Longevity risks in living benefits. Working Paper 23/02. Center for Research on Pensions and Welfare Policies.
- Pitacco, E. (2004). Survival models in a dynamic context: a survey. *Insurance: Mathematics and Economics* 35, 279-298.
- Renshaw, A.E. e Haberman S. (2006). A cohort-based extension to the Lee-Carter model for mortality reduction factors. *Insurance: Mathematics and Economics* 38, 556-570.
- Renshaw, A.E. e Haberman S. (2008). On simulation-based approaches to risk measurement in mortality with specific reference to Poisson-Lee-Carter modeling. *Insurance: Mathematics and Economics* 42 (2), 797-816.
- Richards, S.J., Currie I.D. e Ritchie, G.P. (2013). A Value-at-Risk framework for longevity trend risk. *British Actuarial Journal (FirstView Articles)*, 1-24.
- Thatcher, A.R. (1999). The long-term pattern of adult mortality and the highest attained age. *Journal of the Royal Statistical Society Series A162*, 5-43.
- Wilmoth, J.R. (1993). Computational Methods for fitting and extrapolating the Lee-Carter model of mortality change. Technical Report. Department of Demography. University of California, Berkeley.
- Wilmoth, J.R. (2000). Demography of longevity: past, present and future trends. *Experimental Gerontology* 35, 1111-1129.

Fontes de dados estatísticos:

Human Mortality Database. University of California, Berkeley (EUA), e Max Planck Institute for Demographic Research (Alemanha). Disponível em www.mortality.org/. Os dados disponíveis neste *site* foram obtidos, na sua maioria, através do Instituto Nacional de Estatística.

Instituto Nacional de Estatística/PORDATA (2013). Esperança de vida aos 65 anos por sexo. Disponível em:

www.pordata.pt/Espanca+de+vida+aos+65+anos+total+e+por+sexo-419.

Instituto Nacional de Estatística (2009). Projeções da população residente – Portugal - 2008-2060. Disponível em:

www.ine.pt/xportal/xmain?xpid=INE&xpgid=ine_publicacoes&PUBLICACOESpub_boui=65946767&PUBLICACOESmodo=2&xlang=pt.

Instituto de Seguros de Portugal.

Anexos

Anexo A - Processo Iterativo de Goodman

Este processo, cujo desenvolvimento é atribuído a Goodman (1979), é baseado no algoritmo de Newton-Raphson e permite estimar parâmetros de modelos com termos log bilineares.

Em termos genéricos, o processo iterativo consiste em atualizar, na $(\nu + 1)$ -ésima iteração, um conjunto de parâmetros $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$ enquanto os restantes parâmetros se mantêm fixos, usando

$$\hat{\theta}^{(\nu+1)} = \hat{\theta}^{(\nu)} - \frac{\frac{\partial L^{(\nu)}}{\partial \theta}}{\frac{\partial^2 L^{(\nu)}}{\partial \theta^2}}.$$

O algoritmo de implementação do modelo Poisson-Lee-Carter utilizado é descrito por vários autores. Veja-se, por exemplo, Brouhns *et al.* (2002a), Renhaw & Haberman (2006) e Cossette *et al.* (2007).

1. Escolher os valores iniciais $\alpha^{(0)}$, $\beta^{(0)}$ e $k^{(0)}$. Podem ser usados valores aleatórios.
2. Atualizar os três conjuntos de parâmetros seguindo o esquema:

$$\begin{aligned} \bullet \quad \hat{\alpha}_x^{(\nu+1)} &= \hat{\alpha}_x^{(\nu)} + \frac{\sum_t (d_{xt} - \hat{d}_{xt}^{(\nu)})}{\sum_t \hat{d}_{xt}^{(\nu)}}, \quad \hat{\beta}_x^{(\nu+1)} = \hat{\beta}_x^{(\nu)}, \quad \hat{k}_t^{(\nu+1)} = \hat{k}_t^{(\nu)} \\ \bullet \quad \hat{k}_t^{(\nu+2)} &= \hat{k}_t^{(\nu+1)} + \frac{\sum_x (d_{xt} - \hat{d}_{xt}^{(\nu+1)}) \hat{\beta}_x^{(\nu+1)}}{\sum_x \hat{d}_{xt}^{(\nu+1)} (\hat{\beta}_x^{(\nu+1)})^2}, \quad \hat{\beta}_x^{(\nu+2)} = \hat{\beta}_x^{(\nu+1)}, \quad \hat{\alpha}_x^{(\nu+2)} = \hat{\alpha}_x^{(\nu+1)} \end{aligned}$$

Ajustar os valores segundo a restrição $\sum_t k_t = 0$, fazendo $\hat{k}_t^{(\nu+2)} = \hat{k}_t^{(\nu+2)} - \overline{\hat{k}^{(\nu+2)}}$.

$$\bullet \quad \hat{\beta}_x^{(\nu+3)} = \hat{\beta}_x^{(\nu+2)} + \frac{\sum_t (d_{xt} - \hat{d}_{xt}^{(\nu+2)})}{\sum_t \hat{d}_{xt}^{(\nu+2)} (\hat{k}_t^{(\nu+2)})^2}, \quad \hat{\alpha}_x^{(\nu+3)} = \hat{\alpha}_x^{(\nu+2)}, \quad \hat{k}_t^{(\nu+3)} = \hat{k}_t^{(\nu+2)}$$

onde $\hat{d}_{xt}^{(\nu)} = E_{xt} \exp(\hat{\alpha}_x^{(\nu)} + \hat{\beta}_x^{(\nu)} \hat{k}_t^{(\nu)})$, o número estimado de mortes após a ν -ésima iteração.

3. Verificar se o critério de paragem é verificado.

- Se sim: **STOP**; ajustar os parâmetros $\hat{\beta}_x$ e \hat{k}_t de modo a estarem em conformidade com a parametrização do modelo Poisson Lee Carter.

$$\hat{\beta}_x = \frac{\hat{\beta}_x}{\sum_x \hat{\beta}_x}; \quad \hat{k}_t = \hat{k}_t * (\sum_x \hat{\beta}_x).$$

- Se não: voltar ao passo 2.

Os valores iniciais escolhidos para os parâmetros, no caso de Brouhns *et al.* (2002a) foram $\alpha^{(0)} = \mathbf{0}$, $\beta^{(0)} = \mathbf{1}$ e $k^{(0)} = \mathbf{0}$. O critério de paragem utilizado é um incremento muito pequeno do logaritmo da função de máxima verossimilhança.

Anexo B - Valores Estimados para os Parâmetros do Modelo Poisson-Lee-Carter para Homens e Mulheres

Tabela VIII – Valores estimados para os parâmetros do modelo Poisson-Lee-Carter para homens e mulheres

HOMENS							
x	α_x	β_x	x	α_x	β_x	t	k_t
0	-4,002	0,047	50	-4,938	0,007	1960	34,127
1	-6,418	0,064	51	-4,886	0,007	1961	37,483
2	-6,820	0,048	52	-4,801	0,008	1962	34,080
3	-7,105	0,039	53	-4,704	0,008	1963	32,178
4	-7,256	0,033	54	-4,640	0,008	1964	31,390
5	-7,423	0,029	55	-4,560	0,008	1965	29,292
6	-7,557	0,030	56	-4,484	0,009	1966	29,930
7	-7,527	0,026	57	-4,392	0,008	1967	27,417
8	-7,676	0,023	58	-4,315	0,009	1968	27,129
9	-7,685	0,022	59	-4,225	0,009	1969	27,306
10	-7,694	0,018	60	-4,126	0,009	1970	26,608
11	-7,691	0,018	61	-4,057	0,009	1971	26,687
12	-7,699	0,018	62	-3,960	0,010	1972	19,484
13	-7,577	0,016	63	-3,865	0,010	1973	21,220
14	-7,419	0,016	64	-3,787	0,010	1974	19,091
15	-7,154	0,013	65	-3,683	0,009	1975	19,738
16	-6,859	0,010	66	-3,602	0,009	1976	18,452
17	-6,664	0,008	67	-3,502	0,010	1977	14,878
18	-6,505	0,006	68	-3,402	0,010	1978	12,473
19	-6,415	0,007	69	-3,310	0,010	1979	9,258
20	-6,392	0,006	70	-3,192	0,010	1980	9,184
21	-6,380	0,006	71	-3,114	0,009	1981	6,937
22	-6,414	0,004	72	-3,002	0,010	1982	3,801
23	-6,411	0,006	73	-2,901	0,010	1983	3,682
24	-6,378	0,006	74	-2,794	0,010	1984	2,870
25	-6,371	0,006	75	-2,691	0,010	1985	2,097
26	-6,352	0,005	76	-2,583	0,009	1986	-1,093
27	-6,330	0,005	77	-2,484	0,009	1987	-3,835
28	-6,284	0,005	78	-2,372	0,009	1988	-3,665
29	-6,275	0,005	79	-2,271	0,009	1989	-7,346
30	-6,228	0,005	80	-2,219	0,008	1990	-5,269
31	-6,202	0,005	81	-2,130	0,007	1991	-5,085
32	-6,141	0,006	82	-2,029	0,007	1992	-9,713
33	-6,106	0,005	83	-1,929	0,007	1993	-8,200
34	-6,055	0,005	84	-1,836	0,006	1994	-16,118
35	-6,005	0,005	85	-1,744	0,006	1995	-15,481
36	-5,956	0,005	86	-1,654	0,006	1996	-14,354
37	-5,900	0,005	87	-1,560	0,006	1997	-18,792
38	-5,827	0,006	88	-1,469	0,005	1998	-19,798
39	-5,776	0,006	89	-1,387	0,005	1999	-21,348
40	-5,696	0,006	90	-1,310	0,005	2000	-25,298
41	-5,644	0,006				2001	-28,075
42	-5,556	0,006				2002	-29,040
43	-5,479	0,006				2003	-31,277
44	-5,409	0,006				2004	-38,028
45	-5,340	0,007				2005	-37,096
46	-5,279	0,006				2006	-42,747
47	-5,193	0,006				2007	-45,983
48	-5,095	0,007				2008	-48,278
49	-5,023	0,006				2009	-50,873

MULHERES							
x	α_x	β_x	x	α_x	β_x	t	k_t
0	-4,198	0,035	50	-5,699	0,008	1960	46,629
1	-6,560	0,050	51	-5,641	0,007	1961	51,232
2	-7,058	0,039	52	-5,537	0,008	1962	45,956
3	-7,345	0,031	53	-5,480	0,008	1963	43,955
4	-7,591	0,030	54	-5,420	0,008	1964	43,013
5	-7,721	0,024	55	-5,345	0,008	1965	39,495
6	-7,814	0,021	56	-5,251	0,008	1966	40,436
7	-7,950	0,021	57	-5,188	0,008	1967	36,946
8	-8,039	0,018	58	-5,068	0,009	1968	36,761
9	-8,139	0,017	59	-5,005	0,008	1969	37,507
10	-8,130	0,014	60	-4,878	0,009	1970	36,077
11	-8,098	0,013	61	-4,820	0,009	1971	35,618
12	-8,148	0,013	62	-4,713	0,009	1972	26,560
13	-8,125	0,013	63	-4,609	0,010	1973	29,643
14	-7,922	0,010	64	-4,500	0,010	1974	26,117
15	-7,835	0,010	65	-4,396	0,010	1975	24,894
16	-7,747	0,009	66	-4,292	0,010	1976	23,854
17	-7,735	0,010	67	-4,180	0,010	1977	17,561
18	-7,669	0,009	68	-4,050	0,010	1978	16,625
19	-7,609	0,008	69	-3,940	0,010	1979	12,202
20	-7,571	0,008	70	-3,792	0,010	1980	10,551
21	-7,514	0,010	71	-3,696	0,010	1981	8,627
22	-7,552	0,010	72	-3,550	0,011	1982	3,545
23	-7,497	0,010	73	-3,428	0,010	1983	4,418
24	-7,417	0,010	74	-3,278	0,010	1984	1,692
25	-7,444	0,010	75	-3,155	0,010	1985	-0,236
26	-7,348	0,011	76	-3,029	0,010	1986	-2,639
27	-7,325	0,011	77	-2,907	0,010	1987	-6,382
28	-7,305	0,011	78	-2,767	0,010	1988	-6,979
29	-7,231	0,011	79	-2,647	0,009	1989	-11,994
30	-7,165	0,010	80	-2,574	0,008	1990	-7,761
31	-7,103	0,010	81	-2,478	0,007	1991	-9,014
32	-7,069	0,010	82	-2,345	0,007	1992	-15,977
33	-6,966	0,009	83	-2,234	0,006	1993	-13,948
34	-6,917	0,009	84	-2,114	0,006	1994	-22,955
35	-6,828	0,008	85	-2,004	0,005	1995	-21,861
36	-6,772	0,009	86	-1,892	0,005	1996	-22,686
37	-6,718	0,009	87	-1,800	0,005	1997	-26,223
38	-6,630	0,009	88	-1,692	0,005	1998	-28,184
39	-6,531	0,008	89	-1,593	0,005	1999	-29,063
40	-6,446	0,008	90	-1,510	0,004	2000	-33,756
41	-6,419	0,007				2001	-37,010
42	-6,316	0,007				2002	-38,380
43	-6,264	0,008				2003	-37,510
44	-6,202	0,007				2004	-48,287
45	-6,093	0,007				2005	-45,173
46	-6,019	0,007				2006	-56,598
47	-5,952	0,006				2007	-56,483
48	-5,842	0,007				2008	-59,323
49	-5,800	0,007				2009	-61,495

Anexo C - Valores Projetados de K_t do modelo Poisson-Lee-Carter para Homens e Mulheres

Tabela IX – Valores projetados para o parâmetro k_t do modelo Poisson-Lee-Carter para homens e mulheres

HOMENS						MULHERES					
t^*	k_{t^*}	t^*	k_{t^*}	t^*	k_{t^*}	t^*	k_{t^*}	t^*	k_{t^*}	t^*	k_{t^*}
2010	-52,608	2052	-125,466	2094	-198,323	2010	-63,701	2052	-156,379	2094	-249,057
2011	-54,343	2053	-127,200	2095	-200,058	2011	-65,908	2053	-158,586	2095	-251,264
2012	-56,077	2054	-128,935	2096	-201,793	2012	-68,115	2054	-160,792	2096	-253,470
2013	-57,812	2055	-130,670	2097	-203,528	2013	-70,321	2055	-162,999	2097	-255,677
2014	-59,547	2056	-132,405	2098	-205,262	2014	-72,528	2056	-165,206	2098	-257,884
2015	-61,282	2057	-134,139	2099	-206,997	2015	-74,734	2057	-167,412	2099	-260,090
2016	-63,016	2058	-135,874	2100	-208,732	2016	-76,941	2058	-169,619	2100	-262,297
2017	-64,751	2059	-137,609	2101	-210,466	2017	-79,148	2059	-171,826	2101	-264,503
2018	-66,486	2060	-139,343	2102	-212,201	2018	-81,354	2060	-174,032	2102	-266,710
2019	-68,220	2061	-141,078	2103	-213,936	2019	-83,561	2061	-176,239	2103	-268,917
2020	-69,955	2062	-142,813	2104	-215,671	2020	-85,768	2062	-178,445	2104	-271,123
2021	-71,690	2063	-144,548	2105	-217,405	2021	-87,974	2063	-180,652	2105	-273,330
2022	-73,425	2064	-146,282	2106	-219,140	2022	-90,181	2064	-182,859	2106	-275,537
2023	-75,159	2065	-148,017	2107	-220,875	2023	-92,387	2065	-185,065	2107	-277,743
2024	-76,894	2066	-149,752	2108	-222,609	2024	-94,594	2066	-187,272	2108	-279,950
2025	-78,629	2067	-151,486	2109	-224,344	2025	-96,801	2067	-189,479	2109	-282,156
2026	-80,363	2068	-153,221	2110	-226,079	2026	-99,007	2068	-191,685	2110	-284,363
2027	-82,098	2069	-154,956	2111	-227,813	2027	-101,214	2069	-193,892	2111	-286,570
2028	-83,833	2070	-156,690	2112	-229,548	2028	-103,420	2070	-196,098	2112	-288,776
2029	-85,567	2071	-158,425	2113	-231,283	2029	-105,627	2071	-198,305	2113	-290,983
2030	-87,302	2072	-160,160	2114	-233,018	2030	-107,834	2072	-200,512	2114	-293,189
2031	-89,037	2073	-161,895	2115	-234,752	2031	-110,040	2073	-202,718	2115	-295,396
2032	-90,772	2074	-163,629	2116	-236,487	2032	-112,247	2074	-204,925	2116	-297,603
2033	-92,506	2075	-165,364	2117	-238,222	2033	-114,454	2075	-207,131	2117	-299,809
2034	-94,241	2076	-167,099	2118	-239,956	2034	-116,660	2076	-209,338	2118	-302,016
2035	-95,976	2077	-168,833	2119	-241,691	2035	-118,867	2077	-211,545	2119	-304,223
2036	-97,710	2078	-170,568	2120	-243,426	2036	-121,073	2078	-213,751	2120	-306,429
2037	-99,445	2079	-172,303	2121	-245,161	2037	-123,280	2079	-215,958	2121	-308,636
2038	-101,180	2080	-174,038	2122	-246,895	2038	-125,487	2080	-218,165	2122	-310,842
2039	-102,915	2081	-175,772	2123	-248,630	2039	-127,693	2081	-220,371	2123	-313,049
2040	-104,649	2082	-177,507	2124	-250,365	2040	-129,900	2082	-222,578	2124	-315,256
2041	-106,384	2083	-179,242	2125	-252,099	2041	-132,106	2083	-224,784	2125	-317,462
2042	-108,119	2084	-180,976	2126	-253,834	2042	-134,313	2084	-226,991	2126	-319,669
2043	-109,853	2085	-182,711	2127	-255,569	2043	-136,520	2085	-229,198	2127	-321,876
2044	-111,588	2086	-184,446	2128	-257,304	2044	-138,726	2086	-231,404	2128	-324,082
2045	-113,323	2087	-186,181	2129	-259,038	2045	-140,933	2087	-233,611	2129	-326,289
2046	-115,057	2088	-187,915	2130	-260,773	2046	-143,140	2088	-235,817	2130	-328,495
2047	-116,792	2089	-189,650	2131	-262,508	2047	-145,346	2089	-238,024	2131	-330,702
2048	-118,527	2090	-191,385	2132	-264,242	2048	-147,553	2090	-240,231	2132	-332,909
2049	-120,262	2091	-193,119	2133	-265,977	2049	-149,759	2091	-242,437	2133	-335,115
2050	-121,996	2092	-194,854	2134	-267,712	2050	-151,966	2092	-244,644	2134	-337,322
2051	-123,731	2093	-196,589			2051	-154,173	2093	-246,851		

Anexo D – Modelo Relacional tipo-Brass

Apresentam-se de seguida os resultados obtidos para o modelo relacional tipo-Brass.

Tabela X – Parâmetros do modelo relacional tipo-Brass para homens e mulheres

Modelo Relacional tipo-Brass	Homens	Mulheres
Parâmetro a	-0,3871994	-0,7051723
Parâmetro b	0,96651969	0,8333761
Erro Padrão σ_a	0,06447198	0,11897967
Erro Padrão σ_b	0,01980923	0,0307099

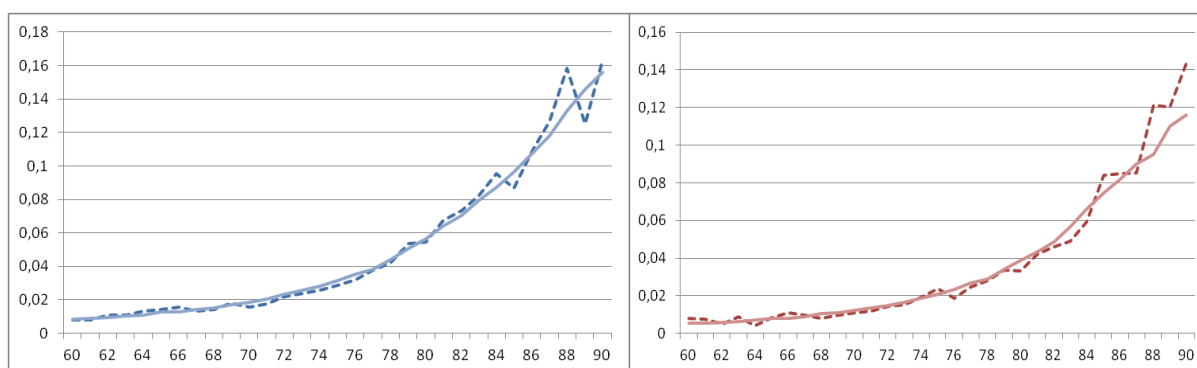


Figura 4 – Comparação dos valores de μ_x (a tracejado) com os valores do modelo relacional tipo-Brass (a cheio) para homens (esquerda) e mulheres (direita)

Graficamente verifica-se que este modelo relacional apresenta um bom ajustamento aos dados de fundos de pensões. Contudo, uma análise mais detalhada revela um problema importante: no caso da população feminina induz valores de mortalidade superiores aos da população geral, na maioria das idades, o que não é esperado. Este facto pode ser observado com mais clareza na Figura 5.

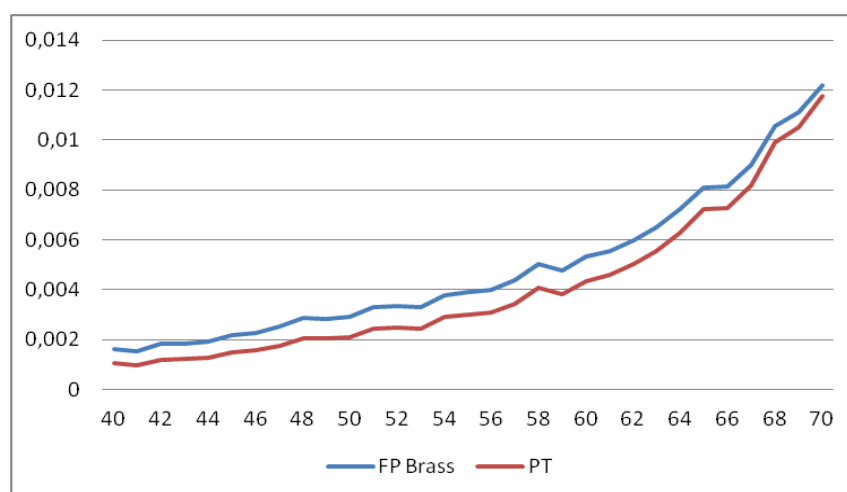


Figura 5 – Comparação dos valores de μ_x obtidos com o modelo relacional tipo-Brass para mulheres com os dados da população feminina portuguesa entre os 40 e os 70 anos

Assim, para haver consistência entre as populações masculina e feminina, e apesar de este problema não se verificar para os homens, optou-se por não escolher este modelo para relacionar a população portuguesa e a população de fundos de pensões.

Anexo E – Exemplos de valores para as probabilidades de morte projetadas para a população portuguesa de fundos de pensões

Ano 2009

Ano 2134

Ano de referência: 2009

$q_{x+k}^{FP}(2009 + k)$
Homens

x \ t	0	1	2	3	...	59	60	61	62	...	124	125
0	0,001237	4,12E-05	6,01E-05	6,78E-05	...	0,002695	0,002918	0,003292	0,003075	...	0,989446	1
1	4,61E-05	6,53E-05	7,26E-05	8,11E-05	...	0,002964	0,003342	0,003127	0,003309	...	1	
...		
63	0,009399	0,009951	0,011214	0,011807	...	0,954783	0,975017	0,990988	1			
64	0,010121	0,011393	0,012001	0,012864	...	0,975086	0,991013	1				
65	0,011575	0,012197	0,01308	0,013889	...	0,991038	1					
66	0,012397	0,0133	0,014132	0,015573	...	1						
...							
89	0,132324	0,142161	0,162932	0,177468	...							
90	0,143306	0,16415	0,178722	0,194272	...							
91	0,165376	0,179984	0,195568	0,212153	...							
...							
123	0,979258	0,992516	1									
124	0,992542	1										
125	1											

Esta figura mostra a configuração final das Tábuas de Mortalidade Dinâmica por géneros. Os valores de x correspondem à idade do indivíduo no ano de referência da tabela. Cada coluna representa um ano de projeção t, começando em t=0, o ano de referência.

Ano de referência: 2009

$q_{x+k}^{FP}(2009 + k)$
Mulheres

x \ t	0	1	2	3	...	59	60	61	62	...	124	125
0	0,001343	4,59E-05	5,04E-05	5,9E-05	...	0,001031	0,000965	0,00111	0,001059	...	0,990023	1
1	5,12E-05	5,49E-05	6,32E-05	4,97E-05	...	0,000985	0,001131	0,001081	0,001091	...	1	
...		
63	0,00417	0,004583	0,005021	0,005286	...	0,955146	0,975749	0,991578	1			
64	0,004681	0,005128	0,005404	0,00594	...	0,975822	0,991603	1				
65	0,005237	0,005524	0,006071	0,006531	...	0,991628	1					
66	0,005647	0,006205	0,006683	0,007447	...	1						
...							
89	0,11023	0,121561	0,135094	0,148697	...							
90	0,12262	0,136301	0,149952	0,164666	...							
91	0,137518	0,151217	0,165976	0,181836	...							
...							
123	0,980195	0,99312	1									
124	0,993146	1										
125	1											

Figura 6 – Tábuas de mortalidade dinâmicas por género

Apresenta-se de seguida, a título de exemplo, os resultados correspondentes a indivíduos com 65 anos em 2009.

Tabela XI – Probabilidades de morte de um indivíduo com 65 anos no ano de referência da tábua de mortalidade dinâmica

Ano	Homem	Ano	Homem	Ano	Mulher	Ano	Mulher
2009	0,011574841	2040	0,214993348	2009	0,005236582	2040	0,182760159
2010	0,012197377	2041	0,234160099	2010	0,005524324	2041	0,201256439
2011	0,013080375	2042	0,25451792	2011	0,006071141	2042	0,221101817
2012	0,013888741	2043	0,276078183	2012	0,006530962	2043	0,242324248
2013	0,015316696	2044	0,298844131	2013	0,007282519	2044	0,264942313
2014	0,016181006	2045	0,322809979	2014	0,008083708	2045	0,288963873
2015	0,01824211	2046	0,347960023	2015	0,009090747	2046	0,314384728
2016	0,019356724	2047	0,374267767	2016	0,009675172	2047	0,341187283
2017	0,021467471	2048	0,401695082	2017	0,01091269	2048	0,369339238
2018	0,023536205	2049	0,4301914	2018	0,012365769	2049	0,398792345
2019	0,025625564	2050	0,459692963	2019	0,013724246	2050	0,429481226
2020	0,028851823	2051	0,490122123	2020	0,015555263	2051	0,461322292
2021	0,031131859	2052	0,521386705	2021	0,017989857	2052	0,494212774
2022	0,034178524	2053	0,553379431	2022	0,019440894	2053	0,528029867
2023	0,039423299	2054	0,585977392	2023	0,023530503	2054	0,562630014
2024	0,043660387	2055	0,61904157	2024	0,028106193	2055	0,597848308
2025	0,050226699	2056	0,652416358	2025	0,033488386	2056	0,633498005
2026	0,053410478	2057	0,685929056	2026	0,036932308	2057	0,669370104
2027	0,059889859	2058	0,71938925	2027	0,042802346	2058	0,705232929
2028	0,066303982	2059	0,752587975	2028	0,049084212	2059	0,740831603
2029	0,071984938	2060	0,785296463	2029	0,05629904	2060	0,775887213
2030	0,082265827	2061	0,817264175	2030	0,062155711	2061	0,810095389
2031	0,09017999	2062	0,848215614	2031	0,071289724	2062	0,843123743
2032	0,099756005	2063	0,877845001	2032	0,075107035	2063	0,874607285
2033	0,108200882	2064	0,905807076	2033	0,087041024	2064	0,904140058
2034	0,117088995	2065	0,931700376	2034	0,098573011	2065	0,931259399
2035	0,136170276	2066	0,955034368	2035	0,109041557	2066	0,955414385
2036	0,149774915	2067	0,975155787	2036	0,121450828	2067	0,975894647
2037	0,164422608	2068	0,991037969	2037	0,134972908	2068	0,99162816
2038	0,180152295	2069	1	2038	0,149664003	2069	1
2039	0,196999064			2039	0,165576953		

Anexo F – Matriz de informação de Fisher e simulação dos parâmetros α , β e k

A construção da matriz \mathfrak{I} torna-se mais simples se se proceder a uma alteração nas restrições habituais usadas no modelo Poisson-Lee-Carter antes da simulação. Para o caso particular aqui estudado, utilizam-se as restrições de identificação sugeridas por Brouhns *et al.* (2002b),

$$(27) \quad \beta_{x_1} = 1 \quad \text{e} \quad k_{t_k} = -\sum_{t \neq t_k} k_t.$$

É por isso necessário transformar os parâmetros estimados utilizando o modelo Poisson-Lee-Carter descrito em 3.5.2., de modo a respeitarem as restrições acima. Para o efeito, recorre-se às expressões

$$(28) \quad \beta_{x_i}^* = \frac{\beta_{x_i}}{\beta_{x_1}} \quad \text{e} \quad k_{t_j}^* = k_{t_j} \times \beta_{x_1}.$$

Deste modo, o conjunto formado pelos parâmetros (α, β^*, k^*) respeita as restrições.

Segundo Renshaw & Haberman (2008), \mathfrak{I} pode escrever-se como uma matriz por blocos,

$$(29) \quad \mathfrak{I} = \begin{bmatrix} A & AB & AK \\ (AB)^T & B & BK \\ (AK)^T & (BK)^T & K \end{bmatrix}_{(2s+n-2) \times (2s+n-2)},$$

onde n é o número anos de calendário considerados (neste caso, $n = 50$) e s é o número de idades consideradas (neste caso, $s = 91$).

O cálculo de cada bloco é feito da seguinte forma:

$$A = \text{diag} \left(\sum_t d_{x_{it}} \right)_{91 \times 91}, \quad \text{para } i = 1, \dots, 91$$

$$B = \text{diag} \left(\sum_t k_t^2 d_{x_{it}} \right)_{90 \times 90}, \quad \text{para } i = 1, \dots, 91$$

$$K = [m_{ij}]_{49 \times 49}, \quad \text{com} \begin{cases} m_{jj} = \sum_x \beta_x^2 (d_{x_{t_j}} + d_{x_{t_n}}), \text{ para } j = 1, \dots, 49 \\ m_{ij} = \sum_x \beta_x^2 d_{x_{t_n}}, \quad \text{para } i \neq j < 50 \end{cases}$$

$$AB = [m_{ij}]_{91 \times 90}, \quad \text{com} \begin{cases} m_{i,i-1} = \sum_t k_t^2 d_{x_{it}}, & \text{para } i > 1 \\ m_{ij} = 0, & \text{nos outros casos} \end{cases}$$

$$AK = [m_{ij}]_{91 \times 49}, \quad \text{com } m_{ij} = \beta_{x_i} (d_{x_{it_j}} - d_{x_{it_n}}), \text{ para } j < n$$

$$BK = [m_{ij}]_{90 \times 49}, \quad \text{com } m_{ij} = \beta_{x_i} (k_{t_j} d_{x_{it_j}} - k_{t_j} d_{x_{it_n}}), \text{ para } i > 1, j < n$$

Neste ponto, é possível gerar simulações dos parâmetros α, β e k com a distribuição Normal Multivariada usando

$$(30) \quad (\alpha^i, \beta^{*i}, k^{*i}) = (\alpha, \beta^*, k^*) + C \varepsilon^i,$$

onde (α, β^*, k^*) é a média da distribuição, ε^i é um vetor independente de variáveis aleatórias com distribuição normal standardizada e C é a matriz obtida através da decomposição de Cholesky de \mathfrak{V}^{-1} , $\mathfrak{V}^{-1} = CC^T$.

Antes de prosseguir com o processo de simulação, os parâmetros β^* e k^* são de novo transformados, de modo a obedecer à parametrização habitual do modelo Poisson-Lee-Carter,

$$(31) \quad \beta_{x_i} = \frac{\beta_{x_i}^*}{\sum_j \beta_{x_j}^*} \quad \text{e} \quad k_{t_j} = k_{t_j}^* \times \sum_j \beta_{x_j}^*.$$